1. 방정식 $(k^2-3)x+1=-k(2x-1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1, 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, k_1+k_2 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ -3 ④ 1 ⑤ -2

해설

$(k^2+2k-3)x=k-1,\quad (k-1)(k+3)x=k-1$

$k=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ (부정)

$\therefore\ k_1=1$

$k=-3$ 일 때, $0\cdot x=-4$ (불능)

$\therefore\ k_2=-3$

$\therefore\ k_1+k_2=-2$

2. $|x-1| = 3-\sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x-1| = 3-|x|$ 에서,
$|x|+|x-1| = 3$ 이다.
ⅰ) $x < 0$ 일 때,
$-x-(x-1) = 3$
$\therefore x = -1$
ⅱ) $0 \le x < 1$ 일 때,
$x-(x-1) = 3$
$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
ⅲ) $x \ge 1$ 일 때,
$x+(x-1) = 3$
$\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

3. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x-6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x-6) = 0$ 에서

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2$

$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$

$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

4. 다음 이차방정식을 풀면?

$$(1-i)x^2+(1+i)x-2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-i$　② $x=-1$ 또는 $x=-1-i$

③ $x=-1$ 또는 $x=-1+i$　④ $x=1$ 또는 $x=-1-i$

⑤ $x=1$ 또는 $x=-1+i$

해설

x^2 의 계수를 실수로 만들기 위해 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)^2x-2(1+i)=0$

$2x^2+2ix-2(1+i)=0$

$(x-1)\left\{x+(1+i)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1-i$

5. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

① 0 ② ± 1 ③ $\pm\sqrt{2}$ ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ ± 2

해설

(ⅰ) $x \geq 0$일 때 $|x| = x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$
$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
이 때, $x \geq 0$이므로 $x = -4$는 부적합
$\therefore x = 1$
(ⅱ) $x < 0$일 때 $|x| = -x$이므로 주어진 방정식은
$x^2 - 3x - 4 = 0, (x-4)(x+1) = 0$
$x = 4$ 또는 $x = -1$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -1$
$\therefore x = 1$ 또는 $x = -1$
이 때, $x < 0$이므로 $x = 4$는 부적합
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = \pm 1$

6. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

7. $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. $0 \le x < 2$일 때, $4[x]x^2 - 4x - 1 = 0$의 해를 α라 하면 2α의 값은?

① $\sqrt{2} - 1$ ② $\sqrt{2} + 1$ ③ $\sqrt{3} + 2$
④ $\sqrt{3} - 1$ ⑤ $\sqrt{3} - 2$

해설

(i) $0 \le x < 1$일 때, $[x] = 0$이므로
$-4x - 1 = 0$
$\therefore\ x = -\frac{1}{4}$(부적합)
(ii) $1 \le x < 2$일 때, $[x] = 1$이므로
$4x^2 - 4x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$
$1 \le x < 2$이므로 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
$\therefore\ 2\alpha = \sqrt{2} + 1$

8. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3, \alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α, β이다. 이 때 β의 값은?(단 p, q는 상수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore\ \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2, \beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore\ \beta=4$

9. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로
$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$
그러므로 $x = 3$또는 $x = 4$
$\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$

10. m은 양의 정수이고, x에 관한 이차방정식 $x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$의 한 근은 정수이다. 이 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

정수근을 α라 하자

$\alpha^2-(3+\sqrt{2})\alpha+m\sqrt{2}-4=0$

$(m-\alpha)\sqrt{2}+\alpha^2-3\alpha-4=0$

$m=\alpha$ 그리고 $\alpha^2-3\alpha-4=0$

$(\alpha+1)(\alpha-4)=0$

$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=4$

m이 양의 정수이므로 $\alpha=4$에서 $m=4$

11. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3　② 0　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot(m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

12. 이차방정식 $x^2 - px + 2p + 1 = 0$이 중근을 갖도록 하는 실수 p의 값을 모두 곱하면?

① -8 ② -4 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$D = p^2 - 4(2p+1)$
$\quad = p^2 - 8p - 4 = 0$
판별식으로부터 나온 p에 대한 방정식의 근들이 주어진 식이 중근을 갖게 하므로
실수 p 값들의 곱은 근과 계수의 관계에서 -4이다.

13. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$　② $a \geq 1$　③ $-1<a<1$

④ $a>1$　⑤ $a \geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$

$1-2+a>0$

$\therefore\ a>1$

14. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

15. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$
위의 식을 정리하면
$-k^2+4k-3=0$
$k^2-4k+3=0$
$(k-1)(k-3)=0$에서
$k=1$ 또는 $k=3$

17. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면

$f(x) = x^2 + (1-y)x + (-6y^2 + 7y + k)$

$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면

$D = (1-y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$가 완전제곱식이어야 한다.

$D = 25y^2 - 30y + (1-4k)$에서

$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1-4k) = 0$

$\therefore\ k = -2$

18. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2+x-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

19. x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2+m-2=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$를 m에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최대값 : 8, 최소값 : 2
② 최대값 : 10, 최소값 : 3
③ 최대값 : 12, 최소값 : $\frac{15}{8}$
④ 최대값 : 11, 최소값 : $\frac{21}{8}$
⑤ 최대값 : 13, 최소값 : $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로
$D/4=m^2-(2m^2+m-2)\geq 0$에서 $-2\leq m\leq 1$
$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=2m^2+m-2$이므로
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=(-2m)^2-(2m^2+m-2)$
$=2m^2-m+2$
$=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}(-2\leq m\leq 1)$
$\therefore m=\frac{1}{4}$일 때, 최솟값 $\frac{15}{8}$
$m=-2$일 때, 최댓값 12

20. 이차방정식 $x^2+kx+3k-11=0$의 두 근의 차가 최소가 되도록 실수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+kx+3k-11=0$의 두 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=3k-11$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=k^2-12k+44=(k-6)^2+8$
따라서 $k=6$일 때 $(\alpha-\beta)^2$는 최소

해설

$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$이므로
$|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{k^2-12k+44}}{1}$
$\therefore\ k^2-12k+44$가 최소이려면 $k=6$

21. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 근 $\alpha,\ \beta$를 갖는다. $f(x)=x^2+bx+a$에 대하여 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② -1　③ -2　④ -3　⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$
$f(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+a=\beta\cdots$㉠
$f(\beta)=\beta^2+b\beta+a=\alpha\cdots$㉡
㉠ − ㉡하면
$\alpha^2-\beta^2+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$
$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+b+1)=0$
$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+b+1=0$
$\therefore\ -a+b+1=0\cdots$㉢
㉠ + ㉡하면
$\alpha^2+\beta^2+b(\alpha+\beta)+2\alpha=\alpha+\beta$
$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(b-1)(\alpha+\beta)+2a=0$
$\therefore\ a^2-2b-a(b-1)+2a=0\cdots$㉣
㉢에서 $b=a-1$을 ㉣에 대입하면
$a^2-2(a-1)-a(a-1-1)+2a=0,\ 2a+2=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$
$\therefore\ a+b=-3$

22. 실계수 이차방정식이 두 허근 α,β를 갖고 $\alpha^2+2\beta=1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2+2x+3=0$　　② $x^2+4x+6=0$

③ $x^2-2x+3=0$　　④ $x^2-4x+6=0$

⑤ $x^2-3x+2=0$

해설

$\alpha=m+ni,\ \beta=m-ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n\neq 0)$라 놓으면

$\alpha^2+2\beta=(m+ni)^2+2(m-ni)$

$\quad=(m^2-n^2+2m)+2n(m-1)i=1$에서

$n\neq 0$이므로 $m=1,\ n^2=2$

$\alpha+\beta=2m=2$

$\alpha\beta=m^2+n^2=3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-2x+3=0$

23. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$
② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$
③ $(x+3)(2x-1)$
④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$
⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

24. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^2 + \overline{\omega}^2 = 16$이다. 실수 k의 값은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

방정식 $x^2 + 2kx + 6k = 0$ 이 허근을 가지므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 6k < 0,\quad k(k-6) < 0$

$\therefore\ 0 < k < 6$

한편, ω 가 허근이고 계수가 실수이므로 주어진 이차방정식의 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\omega + \overline{\omega} = -2k,\ \omega\overline{\omega} = 6k$이므로

$\omega^2 + \overline{\omega}^2 = (\omega + \overline{\omega})^2 - 2\omega\overline{\omega} = (-2k)^2 - 12k$

$= 4k^2 - 12k$

$4k^2 - 12k = 16,$

즉, $k^2 - 3k - 4 = 0$ 에서

$(k+1)(k-4) = 0 \qquad \therefore\ k = -1$ 또는 $k = 4$

$0 < k < 6$ 이므로 $k = 4$

25. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근 ② 서로 다른 두 개의 양의 근

③ 양의 중근 ④ 음의 중근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$

$\quad = (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots$ ㉠ ($\because\ b \neq 0$)

$a > 0,\ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로

(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$ ㉡

(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.