1. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A>B>0,\ C>D>0$이면 $AC>BD$이다.

② $A>B,\ C>D$이면 $A+C>B+D$이다.

③ $A>B>0$이면 $A^2>B^2$이다.

④ $A>B$이면 $\frac{1}{A}<\frac{1}{B}$이다.

⑤ $A>0>B$이면 $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$이다.

해설

④ 만약 $B<0<A$인 경우라면 $\frac{1}{A}>\frac{1}{B}$가 되어 주어진 문장은 틀리다.

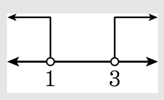
2. 연립부등식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$ 의 해는?

① $-3 < x < 3$　　② $x < -3$　　③ $x > 3$

④ 해가 없다.　　⑤ $-3 < x < 5$

해설

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} > 1 \\ 0.7x + 0.5 < 0.2x + 1 \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 2 \\ 7x + 5 < 2x + 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 5x < 5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$

따라서 해가 없다.

3. 곡선 $y=x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 a, b, c라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+b+c=0$　② $a+b+c=1$　③ $abc=1$
④ $a+c=2b$　⑤ $ac=b^2$

해설

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$, $\mathrm{B}(b, b^3)$, $\mathrm{C}(c, c^3)$이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다.

$\therefore \dfrac{b^3-a^3}{b-a} = \dfrac{c^3-a^3}{c-a}$

즉, $b^2+ab+a^2=c^2+ac+a^2$

$(b-c)(a+b+c)=0$ 에서 $b \neq c$ 이므로

$a+b+c=0$

4. 직선 $x+3y-k=0$이 원 $(x-5)^2+y^2=3$의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.
따라서 원의 중심 $(5,\ 0)$이 직선 위에 있으므로 $5-k=0$
$\therefore\ k=5$

5. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 x^2-y^2의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 −12

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를

㉡식에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20$, $2x^2-4x+4-20=0$,

$x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore$ $x^2-y^2=16-4=12$ 또는 $x^2-y^2=4-16=-12$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.

㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$

㉠에 대입하여 정리하면

$x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -2$

$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

7. 방정식 $2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$에서
$x^2+4xy+4y^2+x^2+2x+1=0$,
$(x+2y)^2+(x+1)^2=0$
x, y가 실수이므로 $x+2y=0$ …… ①, $x+1=0$ …… ②
①, ②에서 $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x+y=-\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x에 대하여 정리하면$2x^2+2(2y+1)+(4y^2+1)=0$ …… ①
x가 실수이므로 $\frac{D}{4}=(2y+1)^2-2(4y^2+1)\geq 0$
$\therefore\ (2y-1)^2\leq 0$
그런데 $2y-1$ 이 실수이므로 $2y-1=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}$ …… ②
②를 ①에 대입하면
$2x^2+4x+2=0$, $(x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ …… ③
②, ③에서 $x+y=-\frac{1}{2}$

8. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ x=4,\ y=2$

9. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30개이고 배점은 80점이다. 문항별 배점은 2점, 3점, 4점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x, 3점문항을 y,
4점문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

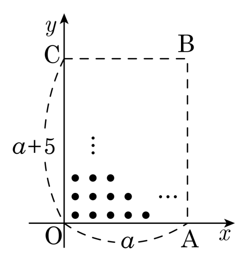
㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11문항

10. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OC}} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(a-1)(a+4) \le 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \le 0$

$\therefore 0 < a \le 6$

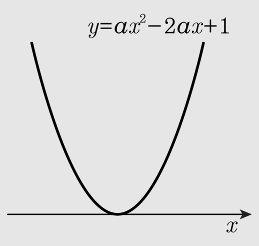
11. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

12. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

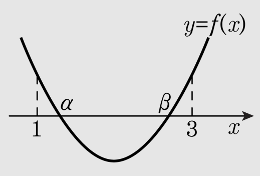
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$

$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

13. 네 점 A$(3,\ 5)$, B$(a,\ 10)$, C$(-1,-1)$, D$(-2,b)$를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 될 때, a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

평행사변형이 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
즉, ($\overline{\mathrm{AC}}$의 중점)=($\overline{\mathrm{BD}}$의 중점) 이므로

$$(\overline{\mathrm{AC}}\text{의 중점}) = \left(\frac{3+(-1)}{2},\ \frac{5+(-1)}{2}\right) = (1,2)$$
$$= \left(\frac{a+(-2)}{2},\ \frac{10+b}{2}\right)$$

$\frac{a+(-2)}{2}=1,\ \frac{10+b}{2}=2$ 에서 $a=4,\ b=-6$

$\therefore\ a+b=-2$

14. 두 직선 $y = 3x + 2$, $x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\therefore\ 3 \times \frac{1}{a} = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -3$

15. 좌표평면 위의 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$ 를 이은 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식은?

① $y=-2x-5$　② $y=-2x+5$　③ $y=2(x-5)$
④ $y=2x+1$　⑤ $y=2x-1$

해설

선분 AB 의 기울기 : $\dfrac{2-4}{3-(-1)}=-\dfrac{1}{2}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 2 이다.
또, 선분 AB 의 수직이등분선은 두 점 A, B 의 중점을 지난다.

중점의 좌표는 $\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(1,\ 3)$ 이므로

구하는 직선의 방정식은 $y-3=2(x-1)$
$\therefore\ y=2x+1$

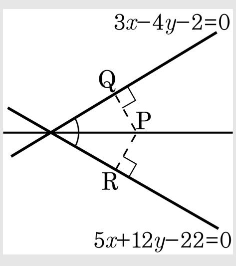
16. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a는 양수, a, b, c는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$
즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는
$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면
$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서
기울기가 양이므로
$\therefore\ x-8y+6=0$
$\therefore a+b+c=-1$

17. $x^2+y^2=1$ 일 때, $2x+y$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

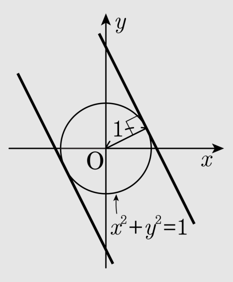
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 $\sqrt{5}$

▷ 정답 : 최솟값 $-\sqrt{5}$

해설



구하는 $2x+y=k$ 라 하면 $y=-2x+k$ 에서 k 는 기울기가 -2 인 직선의 y 절편이다.
주어진 조건을 만족할 때, 직선은 다음 그림과 같이 존재하므로 점과 직선사이의 거리에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} \le 1$

$\therefore\ -5 \le k \le \sqrt{5}$

18. 좌표평면 위에 다음과 같은 한 직선과 두 원이 있다.

$y = mx + 3 \cdots$ ㉠ $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ㉡ $x^2 + y^2 = 4 \cdots$ ㉢

직선 ㉠은 원 ㉡와 만나지 않고, 원 ㉢과는 공유점을 가질 때, m 의 값의 범위를 구하시오.(단, $m > 0$)

① $\sqrt{5} \le m < 2\sqrt{3}$

② $\sqrt{5} \le m < 2\sqrt{2}$

③ $\sqrt{5} \le m < 4$

④ $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{2}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{3}$

해설

원과 직선이 만나지 않으면 원 중심에서 직선까지의 거리가 반지름보다 크고 공유점이 있으면 반지름 이하이다.

$\Rightarrow$ i) ㉡ 와 안 만날 때 : $\dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} > 1$

ii) ㉢ 과 공유점을 가질 때 : $\dfrac{|3|}{\sqrt{m^2+1}} \le 2$

$\Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$, $m \le -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

또는 $m \ge \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

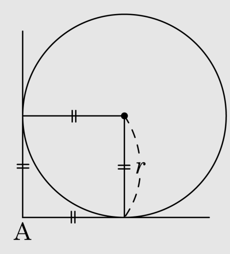
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{5}}{2} \le m < 2\sqrt{2}$ ($\because m > 0$)

19. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$
$\therefore\ r=3$

20. 방정식 $2x^2+2xy+5y^2+6x+12y+9=0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

준식을 y에 대한 내림차순으로 정리하면

$5y^2+2(x+6)y+(2x^2+6x+9)=0$

y 가 실근을 가져야 하므로 판별식 $\dfrac{D}{4}\geq 0$

$$\frac{D}{4}=(x+6)^2-5(2x^2+6x+9)$$
$$=-9x^2-18x-9=-9(x+1)^2\geq 0$$

따라서 $-9(x+1)^2=0$

$x+1=0$

$\therefore\ x=-1$

준식에 $x=-1$ 을 대입하면

$2-2y+5y^2-6+12y+9=0$

$5y^2+10y+5=0$

$5(y+1)^2=0$

$\therefore\ y=-1$

$\therefore\ x+y=-2$

21. 연립부등식 $-3 < \frac{x+a}{2} \leq 2$ 의 해가 $-7 < x \leq b$ 일 때, $ax-b<0$ 의 해를 구하면?

① $x<1$ ② $x>1$ ③ $1<x<3$
④ $x<3$ ⑤ $x>3$

해설

$-6 < x+a \leq 4$ 와 $-7 < x \leq b$와 같으므로 $-6-a < x \leq 4-a$,
$a=1,\ b=3$
$ax-b=x-3<0$
그러므로 $x<3$ 이다.

22. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \le 4$　　② $0 < a \le 3$　　③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \le 4$　　⑤ $0 < a < 4$

해설

$\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \cdots ㉠ \\ |x| < a \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6 < -x+2$ 의 해는 $x < -4$

$-x+2 < -2x-1$ 의 해는 $x < -3$

$\therefore x < -4$

㉡에서 $|x| < a$는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면

$-a \ge -4,\ a \le 4,$

그런데 a는 양수이므로 a의 값의 범위는 $0 < a \le 4$ 이다.

23. 어느 학교 학생들이 운동장에서 야영을 하기 위해 텐트를 설치하였다. 한 텐트에 3 명씩 자면 12명이 남고, 5명씩 자면 텐트가 10개가 남는다고 할 때, 텐트의 수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▶ 답: 개

▷ 정답: 31 개

▷ 정답: 32 개

▷ 정답: 33 개

해설

텐트 수를 x개, 학생 수를 $(3x+12)$ 명이라 하면

$5(x-11)+1 \le 3x+12 \le 5(x-11)+5$

$5(x-11)+1 \le 3x+12$에서

$5x-55+1 \le 3x+12$,

$2x \le 66$

$\therefore\ x \le 33$

$3x+12 \le 5(x-11)+5$에서

$3x+12 \le 5x-55+5$,

$2x \ge 62$

$\therefore\ x \ge 31$

$\therefore 31 \le x \le 33$

24. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　　② $-2 \le x < 0$　　③ $-1 \le x < 1$

④ $-1 \le x < 0$　　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$

$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$

$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$

$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1 < 0$이므로

$-1 \le x < 1$

25. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\}>0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$　② $1<k<2$　③ $1<k<4$
④ $-1<k<3$　⑤ $-2<k<-1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로
$k>0\cdots$①
$x^2-(k-2)x-3(k-2)>0$이 항상 성립하려면
$D=(k-2)^2+12(k-2)<0$에서
$(k-2)(k+10)<0$
$\therefore\ -10<k<2\cdots$②
①, ②에서 $0<k<2$

26. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$　　② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$　　④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

27. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 실근을 α, β $(\alpha < \beta)$라 하고, 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 모든 해가 $\sqrt{2} \leq x < 3$의 범위 안에 있을 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$ ㉡ $ac > 0$

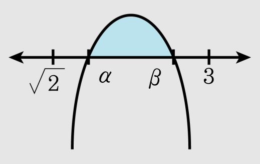
㉢ $4a + c < 2b$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

주어진 조건이 성립하려면 다음 그림과 같이
$a < 0$, $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta < 3$을 만족하여야 한다.



㉠ $\sqrt{2} \leq \alpha < \beta$에서 $\alpha + \beta > 2\sqrt{2}$

㉡ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$이므로 $ac > 0$이다.

㉢ $f(-2) = 4a - 2b + c < 0$에서 $4a + c < 2b$

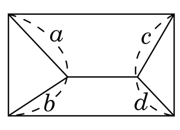
28. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.
$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore\ (x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore\ x \le 1$, $x \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore\ (x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le -1$, $x \ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore\ x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

29. 다음 그림과 같이, 직사각형의 내부에 임의의 선분이 한 변에 평행하게 놓여 있다. 선분의 끝점과 꼭지점 사이의 거리를 a, b, c, d 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $\sqrt{a} + \sqrt{c} = \sqrt{a} + \sqrt{d}$

② $a + c = b + d$

③ $a + b = c + d$

④ $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

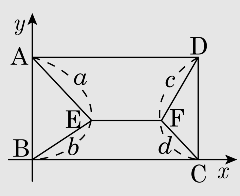
⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

좌표를 도입하여 점 B 가 원점이 되도록 하면

A$(0,\ q)$, C$(p,\ 0)$ 라 할 수 있고 D$(p,\ q)$ 이다.

이때, E$(x,\ y)$, F$(z,\ y)$ 라고 하면



$a^2 = x^2 + (y-q)^2$

$b^2 = x^2 + y^2$

$c^2 = (z-p)^2 + (y-q)^2$

$d^2 = (z-p)^2 + y^2$ 이므로

$\therefore\ a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

30. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$　② $(-2,\ -5)$　③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$　⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2 + (b-1)^2 = (a-4)^2 + (b+3)^2$
정리하면 $12a - 8b = 20$
$\therefore\ 3a - 2b = 5 \cdots$ ①
또, P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로
$b = 2a - 1 \cdots$ ②
①, ② 를 연립하여 풀면 $a = -3,\ b = -7$

31. 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서 직선 $2x-y=0$ 까지의 거리가 같을 때, $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 의 값은 ? (단, $ab<0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서
직선 $2x-y=0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a-0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|2a|=|-b|$,$ab<0$ 이므로
$2a=-b,\ \therefore\ b=-2a$

따라서, $\dfrac{2a-b}{a+b}=\dfrac{2a+2a}{a-2a}=\dfrac{4a}{-a}=-4$

32. 원점에서 직선 $(a-1)x+(a+3)y-4=0$ 에 이르는 거리를 $f(a)$ 라 할 때, $f(a)$ 의 최댓값은? (단, a 는 상수)

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ 2　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$f(a)=\dfrac{|-4|}{\sqrt{(a-1)^2+(a+3)^2}}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{2a^2+4a+10}}$

이 때, $f(a)$ 의 값이 최대가 되려면 분모가 최소이어야 한다.

$2a^2+4a+10=2(a^2+2a)+10=2(a+1)^2+8$

즉, 분모의 최솟값은 $\sqrt{8}$ 이므로

$f(a)$ 의 최댓값은 $\therefore\ \dfrac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$

33. 직선 $x = 2$에 접하고, 원 $(x+3)^2 + y^2 = 1$에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

① $y^2 = -8x$ ② $y^2 = 8x$ ③ $y^2 = -12x$
④ $x^2 = -8y$ ⑤ $x^2 = 8y$

해설

구하는 원의 중심을 $P(x, y)$라 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.
점 P에서 직선 $x = 2$에 내린 수선의 발을 B, 원$(x+3)^2 + y^2 = 1$의 중심을 A라고 하면
$\overline{AP} - 1 = \overline{BP}$에서
$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - 1 = 2 - x$
$\therefore\ y^2 = -12x$

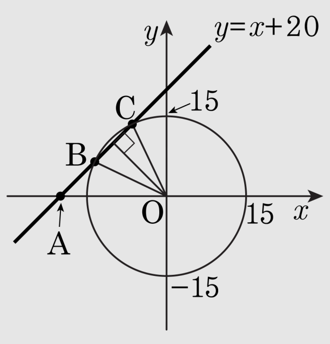
34. 감시 카메라의 서쪽 20km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 방향으로 매시 5km 의 속력으로 가고 있다. 감시 카메라로부터 15km 이내에 있는 배는 감시화면에 나타난다고 할 때, 이 배는 감시 화면에 몇 시간 동안 나타나는지 구하여라

▶ 답 : ______ 시간

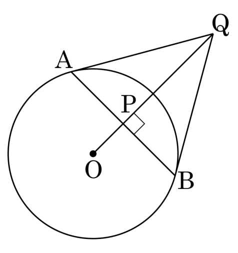
▷ 정답 : 2 시간

해설

감시카메라의 위치와 배의 처음 위치를 각각 $O(0,0)$, $A(-20,0)$ 이라 하면, 배의 자취의 방정식은 $y = x + 20 (x \geq -20)$ 이다.
배가 B, C 위치 사이에 있을 때, 감시 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구하면 된다.
$O(0,0)$ 에서 직선 $x - y + 20 = 0$ 에 이르는 거리는
$\dfrac{|20|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 10\sqrt{2}$
$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{15^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10(km)$
따라서 배의 속력이 5 km/h 시이므로
이 배가 감시 화면에 나타나는 시간은 2 시간이다.



35. 반지름의 길이가 10 인 원 O 의 내부에 한 점 P 가 있다. 점 P 를 지나고 직선 OP 에 수직인 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, A, B 에서의 두 접선의 교점을 Q 라 하자. $\overline{OP} = 5$ 일 때, 선분 PQ 의 길이를 구하여라.

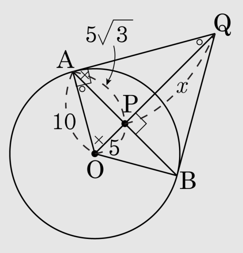


▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\triangle OAP$ 에서 $\overline{OA} = 10$, $\overline{OP} = 5$ 이고 $\angle OPA = 90°$ 이므로 피타고라스의 정리에 의해



$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2}$
$= \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$ 이다.

또한, $\angle AOP = \angle QAP$ 이고 $\angle OAP = \angle AQP$ 이므로

$\triangle OAP$ 와 $\triangle AQP$ 는 닮은 꼴이 된다.

$\therefore\ \overline{OP} : \overline{AP} = \overline{AP} : \overline{PQ}$

$\therefore\ \overline{PQ} = \dfrac{\overline{AP}^2}{\overline{OP}} = \dfrac{75}{5} = 15$