

1. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA 라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2 : 1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2 : 1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $PQ = 12 - 4 = 8$

2. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
 ④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

3. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

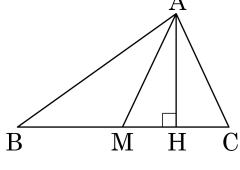
$$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$$

산술기하조건을 사용하면

$$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$$

$$\therefore \text{최솟값} : 20 + 3 \times 4 = 32$$

4. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.

직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

5. 좌표평면 위의 네 점 $A(1, 2)$, $P(0, b)$, $Q(a, 0)$, $B(5, 1)$ 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 $A(1, 2)$ 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 $A'(-1, 2)$, 점 $B(5, 1)$ 의 x 축에 대하여 대칭인 점을 $B'(5, -1)$ 이라 하면

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45}$$

따라서 $k = \sqrt{45}$ 이므로 $k^2 = 45$

6. 「모든 중학생은 고등학교에 진학한다」의 부정인 명제는?

- ① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.
- ② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.
- ③ 중학생이 아니면 고등학교에 진학하지 않는다.
- ④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.
- ⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘ p 이면 q 이다’가 ‘ p 이면 q 가 아니다’이고, ‘모든’의 부정은 ‘어떤’이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’이다.

7. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p: x$ 는 48의 약수, $q: 0 < x < 30$, $r: x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, ‘ p 이고 q 이고 $\sim r$ ’를 만족하는 집합에 속하지 않는 것은?

- ① 6 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
 $P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
 $Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 28\}$
 $R = \{4, 6\}$
‘ p 이고 q 이고 $\sim r$ ’를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
 $P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

8. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

- ①

$r \Rightarrow p$
- ②

$\sim p \Rightarrow \sim s$
- ③

$\sim s \Rightarrow \sim r$
- ④

$r \Rightarrow \sim s$
- ⑤

$\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$
따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

9. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
(1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

[증명]
주어진 명제의 (1)을 (를) 구하여 보면
(1) : ‘ n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’
이 때, n 이 홀수이므로 n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $n = (2)(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, n^2 의 값을 구하면
 $n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$ 는 (3)이므로 n^2 은 홀수이다.
따라서 (1)가 (이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

- ① 역, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ② 이, $2k - 1$, 홀수
③ 대우, $2k + 1, 0$ 또는 짝수 ④ 대우, $2k - 1, 0$ 또는 홀수
⑤ 역, $2k + 1, 0$ 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : ‘ n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.’
이 때, n 이 홀수이므로 n 을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
 $n = 2k + 1(k$ 는 0 또는 자연수)
이 때, n^2 의 값을 구하면
 $n^2 = 2 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$ 는 0 또는 짝수이므로 n^2 은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

10. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된
것을 고르면?

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(증명)

(가)

−

(나)

$$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$
$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$

그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

(다)

 0,

$$\sqrt{a+b}$$

(다)

 0 이므로 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
- ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
- ④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
- ⑤ $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

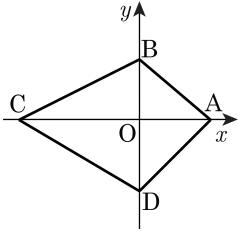
11. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

- ① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = B$
- ② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = B$
- ③ $A \cup \emptyset = \emptyset$
- ④ $A \subset B, B \not\subset A$ 이면 $A \cap B = A$
- ⑤ $A \subset (A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

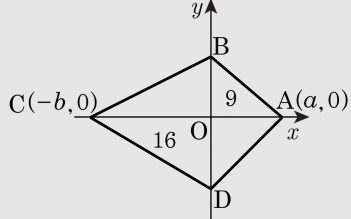
- ① $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A$
- ② $B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$
- ③ $A \cup \emptyset = A$
- ⑤ $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

12. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle OAB$ 와 $\triangle OCD$ 의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



- ① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



$A(a, 0)$ 이면, $B\left(0, \frac{18}{a}\right)$ 이고,

$C(-b, 0)$ 이면 $D\left(0, -\frac{32}{b}\right)$ 이다.

($\because a > 0, b > 0$)

($\square ABCD$ 의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{18}{a} + \frac{32}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50 + \left(\frac{9b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$a > 0, b > 0$ 이므로,

산술기하평균을 이용하면,

$$\square ABCD \geq 25 + 2 \cdot \sqrt{\frac{9b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 49$$

13. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 9\}$, $A - (A - B) = \{1\}$ 을 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 정답 : 8개

해설

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap B) = \{1\} \end{aligned}$$

$A = \{1, 9\}$, $(A \cap B) = \{1\}$, $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 을 만족하는 집합 B 는 원소 1 을 반드시 포함하고 원소 9 를 반드시 포함하지 않으므로
집합 B 의 개수는 $2^3 = 8(\text{개})$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여, $A = \{a, b, d, e\}$, $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \{a, c, f\}$ 일 때, 집합 B 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 32 개

해설

$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{a, c, f\}$
이때, $a \in A$ 이므로 $B - A = \{c, f\}$
또, $A - ((A - B) \cup (B - A)) = A \cap B$ 이므로, $A \cap B = \{b, d, e\}$
이고,
 $(B - A) \cup (A \cap B) = B = \{b, c, d, e, f\}$
따라서 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개)

15. 긴 나무막대기 위에 이 막대기의 길이를 10등분, 12등분, 15등분하는 세 종류의 눈금이 새겨져 있다. 이 눈금을 따라 막대기를 자르면 모두 몇 토막이 나겠는가?

- ① 20토막
- ② 28토막
- ③ 36토막
- ④ 48토막
- ⑤ 60토막

해설

나무막대기의 길이를 1이라 하면 세 종류의 눈금의 간격은 각각 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$ 이다.

즉, $\frac{6}{60}$, $\frac{5}{60}$, $\frac{4}{60}$ 이므로 60이하의 수 중에서 4의 배수 또는 5의 배수 또는 6의 배수인 수의 개수를 구하면 된다. 60이하의 자연수 중 4의 배수, 5의 배수, 6의 배수의 집합을 각각 A , B , C 라 하면

$$n(A) = 15, n(B) = 12, n(C) = 10, n(A \cap B) = 3, n(B \cap C) = 2, n(C \cap A) = 5, n(A \cap B \cap C) = 1$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 15 + 12 + 10 - 3 - 2 - 5 + 1$$

$$= 28$$