

1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1 \text{ 또는 } 2$$

2. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록

하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

3. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$x^2 + (x + 1)^2 = 5, 2x^2 + 2x - 4 = 0,$$

$$2(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, -2$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 2,$$

$$x = -2 \text{ 일 때, } y = -1$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 2 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = -1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2, y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x+y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기
위한 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a > -1$ ② $a < -1$ ③ $a > \frac{3}{2}$
 ④ $a < \frac{3}{2}$ ⑤ $a > -2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots \textcircled{A} \\ ax-y=3 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} \text{에서 } (a+1)x=5$$

$$\therefore x = \frac{5}{a+1} \cdots \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{C} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } \frac{5}{a+1} + y = 2$$

$$\therefore y = 2 - \frac{5}{a+1}$$

그런데 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$\frac{5}{a+1} > 0, 2 - \frac{5}{a+1} > 0 \text{에서,}$$

$$a > \frac{3}{2}$$

6. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1) = 0$, $x^2 - y^2 = 0$ 을 동시에 만족하는 (x, y) 의 개수는?
- ① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개
④ 2 개 ⑤ 4 개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.

이것을 하나의 좌표평면에 그리면

위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개 이다.

7. 200m운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

- ① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
 $3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
 $x + y = 200$
$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분
 $\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3} / \text{분} = \frac{0.4\text{km}}{3} \times 60 / \text{시간} = 8 \text{ km/h}$

8. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \text{에서 } x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$

따라서, $x = 0, y - 1 = 0$ 이므로 $x = 0, y = 1$

$$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$$

9. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

- ① 1

② 2

③ 3
- ④ 4

⑤ 5개 이상

해설

$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$
 $(m - 4)(n - 2) = 8$
 $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1$ 이므로
 $(m, n) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$
 $\therefore$ 4쌍의 (m, n) 이 존재한다.

10. 사차방정식 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에 α 를 넣어도 성립하므로

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{를 } t \text{로 치환하면}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{는 } 3 \text{이 된다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$

11. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3 = 1$

㉡ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉢ $\overline{\omega} = \omega^2 = \frac{1}{\omega}$

㉣ $\omega + \overline{\omega} = 1$

㉤ $\omega \overline{\omega} = 1$

㉥ $\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}} = -1$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$x^3 = 1 \Rightarrow \omega^3 = 1 \cdots \text{㉠}(\bigcirc)$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots \text{㉡}(\bigcirc)$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의해

$$\omega + \overline{\omega} = -1, \omega \overline{\omega} = 1 \cdots \text{㉢}(\times), \text{㉤}(\bigcirc)$$

$\omega + \overline{\omega} = -1$ 이므로

$$\omega^2 + \omega + 1 = \omega^2 - 1 - \overline{\omega} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \overline{\omega} \cdots \text{㉣}(\bigcirc)$$

$$\omega^{2005} + \frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$= (\omega^3)^{668} \omega + \frac{1}{(\omega^3)^{668} \omega}$$

$$= \omega + \frac{1}{\omega} = -1$$

$$(\because \omega^2 + \omega + 1 = 0) \cdots \text{㉥}(\bigcirc)$$

12. 대학수학능력시험 수리탐구 영역 (I) 의 문항 수는 30 개이고 배점은 40 점이다. 문항별 배점은 1 점, 1.5 점, 2 점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12

해설

1 점짜리 문항을 x 개,
1.5 점짜리 문항을 y 개,
2 점짜리 문항을 z 개라고 하면
 $x + 1.5y + 2z = 40 \cdots \textcircled{1}$
 $x + y + z = 30 \cdots \textcircled{2}$
($x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$) 라고 하면
 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \times 3 = -x + z = -10,$
 $x = z + 10, z \geq 1$ 이므로
 $x = z + 10 \geq 11$
이 때 $y = 18$ 이고 준 조건을 만족하므로
 x 의 최솟값은 11

13. 다음 조건을 만족시키는 z_1, z_2, z_3 에 대하여 이것을 근으로 갖는 삼차방정식을 구하면? (단, $z_i(i = 1, 2, 3)$ 는 복소수, $z = \alpha + \beta i$ 일 때, $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, z_1 + z_2 + z_3 = 1, z_1 z_2 z_3 = 1$

- ① $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

② $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
- ③ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

④ $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$
- ⑤ $2x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$

해설

$$z_1 = \alpha + \beta i \text{ 라고 하면 } \bar{z}_1 = \alpha - \beta i$$

$$z_1 \bar{z}_1 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = 1$$

마찬가지로 풀면 $z_2 \bar{z}_2 = 1, z_3 \bar{z}_3 = 1$ 이므로

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$$

$$= \bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$$

$$(\because z_1 z_2 z_3 = 1)$$

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

z_1, z_2, z_3 를 근으로 갖는 방정식은

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

14. 방정식 $x^3 + 2x^2 + px + q = 0$ 이 한 실근과 두 허근 α, α^2 을 가질 때, 실수 p, q 의 곱은?

- ① -2 ② 2 ③ -3 ④ 3 ⑤ 1

해설

(i) 한 허근을 $\alpha = a+bi$ (a, b 는 실수, $b \neq 0$)라 하면 $\alpha^2 = a-bi$
($\because$ 계수가 실수인 방정식)
 $\therefore (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$
 $a^2 - b^2 = a \dots\dots\dots ①$
 $2ab = -b \dots\dots\dots ②$
①, ② 에서 $b \neq 0$ 이므로
 $a = -\frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
(ii) α, α^2 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + x + 1 = 0$
한 실근을 β 라고 할 때, 세 근의 합은
 $\beta + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -2 \therefore \beta = -1$
 $\therefore x^3 + 2x^2 + px + q$
 $= (x^2 + x + 1)(x + 1)$
 $= x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
 $\therefore p = 2, q = 1$
 $\therefore pq = 2$

