1. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근이 <u>아닌</u> 것은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$

$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -3, -1, 1$ 또는 2

2. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\dfrac{a}{1} \neq \dfrac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

3. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5,\ 2x^2 + 2x - 4 = 0,$

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2,$

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2, \ y = \pm 2$

ii) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2}, \quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=2 \\ ax-y=3 \end{cases}$ 의 해가 좌표평면의 제1사분면에 있기 위한 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$　② $a<-1$　③ $a>\frac{3}{2}$

④ $a<\frac{3}{2}$　⑤ $a>-2$

해설

$$\begin{cases} x+y=2 & \cdots ㉠ \\ ax-y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ + ㉡에서 $(a+1)x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{a+1}$ ⋯⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{a+1}+y=2$

$\therefore\ y=2-\frac{5}{a+1}$

그런데 $x>0,\ y>0$이므로

$\frac{5}{a+1}>0,\ 2-\frac{5}{a+1}>0$에서,

$a>\frac{3}{2}$

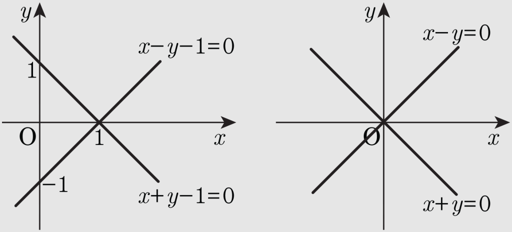
6. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 (x, y)의 개수는?

① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개

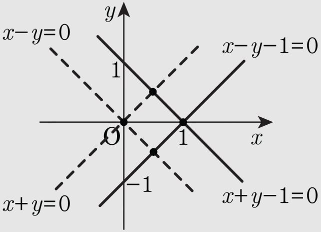
④ 2 개 ⑤ 4 개

해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

7. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x-3y=200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x+y=200$

$$\begin{cases} 3x-3y=200 \\ x+y=200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x=\dfrac{400}{3}\text{m/분}$

$\Rightarrow \dfrac{400\text{m}}{3}/\text{분}=\dfrac{0.4\,\text{km}}{3}\times 60/\text{시간}=8\,\text{km/h}$

8. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$

x, y는 실수이므로 $x^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$

따라서, $x=0$, $y-1=0$이므로 $x=0$, $y=1$

$\therefore\ x+y=0+1=1$

9. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 $(m,\ n)$ 의 개수는?

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5개 이상

해설

$$\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$$

$(m-4)(n-2)=8$

$8=1\times 8=2\times 4=4\times 2=8\times 1$ 이므로

$(m,n)=(5,\ 10),\ (6,\ 6),\ (8,\ 4),\ (12,\ 3)$

$\therefore$ 4쌍의 $(m,\ n)$ 이 존재한다.

10. 사차방정식 $x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을 x^2 으로 나누면

방정식은 $x^2-6x+11-\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$\rightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=0$이 된다.

이 식에 α를 넣어도 성립하므로

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$를 t로 치환하면

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$는 3이 된다.

따라서$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=3$

11. $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음<보기>중 옳은 것의 개수는?

보기

㉠ $\omega^3=1$

㉡ $\omega^2+\omega+1=0$

㉢ $\overline{\omega}=\omega^2=\dfrac{1}{\omega}$

㉣ $\omega+\overline{\omega}=1$

㉤ $\omega\overline{\omega}=1$

㉥ $\omega^{2005}+\dfrac{1}{\omega^{2005}}=-1$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^3=1 \Rightarrow \omega^3=1\cdots$㉠(○)

$x^3-1=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\Rightarrow \omega^2+\omega+1=0\cdots$ ㉡(○)

$\therefore$근과 계수와의 관계에 의해

$\omega+\overline{\omega}=-1, \omega\overline{\omega}=1\cdots$㉣(×), ㉤(○)

$\omega+\overline{\omega}=-1$이므로

$\omega^2+\omega+1=\omega^2-1-\overline{\omega}+1=0$

$\Rightarrow \omega^2=\overline{\omega}\cdots$㉢(○)

$$\omega^{2005}+\frac{1}{\omega^{2005}}$$

$$=(\omega^3)^{668}\omega+\frac{1}{(\omega^3)^{668}\omega}$$

$$=\omega+\frac{1}{\omega}=-1$$

$(\because \omega^2+\omega+1=0)\cdots$㉥(○)

12. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x+1.5y+2z=40 \cdots$ ㉠
$x+y+z=30 \cdots$ ㉡
$(x \geq 1,\ y \geq 1,\ z \geq 1)$라고 하면
㉠ $\times 2-$ ㉡ $\times 3=-x+z=-10$,
$x=z+10,\ z \geq 1$이므로
$x=z+10 \geq 11$
이 때 $y=18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

13. 다음 조건을 만족시키는 z_1, z_2, z_3 에 대하여 이것을 근으로 갖는 삼차방정식을 구하면? (단, $z_i(i=1,\ 2,\ 3)$는 복소수, $z=\alpha+\beta i$ 일 때, $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$)

$$\boxed{|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,\ z_1+z_2+z_3=1,\ z_1z_2z_3=1}$$

① $x^3-x^2+x-1=0$
② $x^3-x^2+2x-1=0$
③ $x^3-x^2-x-1=0$
④ $x^3-x^2-2x-1=0$
⑤ $2x^3-2x^2-x-2=0$

해설

$z_1=\alpha+\beta i$ 라고 하면 $\bar{z}_1=\alpha-\beta i$

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_1 &= (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) \\ &= \alpha^2+\beta^2=|z_1|^2=1 \end{aligned}$$

마찬가지로 풀면 $z_2\bar{z}_2=1,\ z_3\bar{z}_3=1$ 이므로

$$\begin{aligned} z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 &= \frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2} \\ &= \bar{z}_3+\bar{z}_1+\bar{z}_2 \\ &= \overline{z_1+z_2+z_3}=1 \\ &(\because\ z_1z_2z_3=1) \end{aligned}$$

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

z_1, z_2, z_3 를 근으로 갖는 방정식은

$x^3-x^2+x-1=0$

14. 방정식 $x^3+2x^2+px+q=0$이 한 실근과 두 허근 $\alpha,\ \alpha^2$을 가질 때, 실수 $p,\ q$의 곱은?

① -2 ② 2 ③ -3 ④ 3 ⑤ 1

해설

(i) 한 허근을 $\alpha=a+bi$ $(a,\ b$는 실수, $b\neq 0)$라 하면 $\alpha^2=a-bi$
(∵ 계수가 실수인 방정식)
$\therefore (a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=a-bi$
$a^2-b^2=a\cdots\cdots\cdots$①
$2ab=-b\cdots\cdots\cdots$②
①, ② 에서 $b\neq 0$ 이므로

$$a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 라 하면 $\alpha^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(ii) $\alpha,\ \alpha^2$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$
한 실근을 β라고 할 때, 세 근의 합은

$$\beta+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2\ \therefore \beta=-1$$

$\therefore x^3+2x^2+px+q$
$=(x^2+x+1)(x+1)$
$=x^3+2x^2+2x+1$
$\therefore p=2,\ q=1$
$\therefore pq=2$

15. 다음의 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 수의 최댓값은?

> 내접원의 반지름의 길이가 1 인 직각삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 r 라 하면, $r \geq \boxed{}$ 이다.

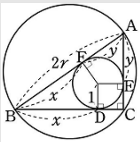
① 2　　② $1+\sqrt{2}$　　③ $1+\sqrt{3}$

④ $2+\sqrt{2}$　　⑤ $2+\sqrt{3}$

해설

아래 그림과 같이 내접원의 반지름이 1 인 직각삼각형 ABC 와 내접원의 접점을 각각

, D, E, F 라 하고, $\overline{\mathrm{BD}}=x, \overline{\mathrm{AE}}=y$ 라 하면



$\overline{\mathrm{AB}}=2r$ 이고 $\overline{\mathrm{BF}}=x, \overline{\mathrm{AF}}=y$ 이므로

$2r=x+y \cdots$ ㉠

또, 피타고라스정리에 의하여

$(x+1)^2+(y+1)^2=(2r)^2 \cdots$ ㉡

㉠에서 $y=2r-x$ 를 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2-2rx+2r+1=0 \cdots$ ㉢

㉢이 실근을 가지므로

$D/4=r^2-(2r+1) \geq 0$

$\therefore\ r \geq 1+\sqrt{2}$