

1. A(1, -5), B(6, 5) 를 잇는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는?

① (3, -1)

② (4, 1)

③ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

④ (2, 2)

⑤ (9, 25)

해설

내분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3 + 2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times (-5)}{3 + 2} \right) = (4, 1)$$

2. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \\ &= 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \\ &= 3 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} = 2, \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2$$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3 + 2 = 5$

3. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

① 2

② 3

③ $\sqrt{10}$

④ $\sqrt{15}$

⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 &\leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2 \\ &= 2(x + 3y)\end{aligned}$$

$= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)

그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로

$$0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$$

따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

4. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $P(x, 0)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 4)^2 + (0 - 5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2, 0)$

5. $(A \cup B) \cap (A^c \cup B)$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : B

해설

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup B = \emptyset \cup B = B$$

6. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.

③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.

④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.

⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

7. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

9. 원점 O와 두 정점 A(2, 3), B(4, 0)에 대하여 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$

② $x^2 + y^2 + 12x - 6y + 29 = 0$

③ $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 29 = 0$

④ $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 29 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 + 12x + 6y + 29 = 0$

해설

P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + y^2$$

$$= \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} + \{(x-4)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$$

10. 좌표평면 위의 세 점 $A(3, 3)$, $B(-3, 0)$, $C(3, 0)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12) \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30 \end{aligned}$$

따라서 $a = 1$, $b = 1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.
 $\therefore a + b = 2$

11. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 $A(-2, 0)$, $B(4, -2)$ 로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1, 1)$

② $(0, 2)$

③ $(1, 3)$

④ $(2, 4)$

⑤ $(3, 5)$

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $P(a, a + 2)$ 라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a + 2)^2 + (a + 2)^2} = \sqrt{(a - 4)^2 + (a + 4)^2}$$

$$2(a + 2)^2 = (a - 4)^2 + (a + 4)^2$$

$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

12. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1 + a + 3}{3} = 1$, $\frac{6 + b + 4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

13. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▷ 정답: 8 명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A , B 라 하면

$$n(A) = 18, n(B) = 15, n(A \cup B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$$

14. 실수 x 에 대하여 두 조건 $p : a \leq x \leq 1$, $q : x \geq -1$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$

② $a \leq 1$

③ $-1 \leq a \leq 1$

④ $a \geq -1$

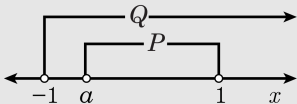
⑤ $a \leq -1$

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

(i) $a > 1$ 일 때, $P = \emptyset$ 이므로 $P \subset Q \therefore a > 1$

(ii) $a \leq 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore -1 \leq a \leq 1$

(i), (ii)에서 $a \geq -1$

15. 지성이는 자기 반 학생 35명의 키와 몸무게를 조사하여 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’ 라는 결론을 내렸다. 다음 <보기> 중 지성의 결론이 참인지 알아보기 위해 반드시 확인해야 할 것을 모두 고르면?

- ㉠ 키가 180cm인 학생의 몸무게
- ㉡ 키가 170cm인 학생의 몸무게
- ㉢ 몸무게가 70kg인 학생의 키
- ㉣ 몸무게가 60kg인 학생의 키

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉣

해설

지성이의 결론 ‘키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 65kg 이상이다.’가 참이면 키가 175cm 이상인 학생의 몸무게는 반드시 65kg 이상이어야 하므로 키가 180cm인 학생의 몸무게가 65kg 이상인지 반드시 확인해야 한다. 또한, 지성이의 결론이 참이면 결론의 대우 ‘몸무게가 65kg 미만인 학생의 키는 175cm 미만이다.’도 참이므로, 몸무게가 60kg인 학생의 키가 175cm 미만인지 확인해야 한다.

∴ ㉠, ㉣