

1. 연립부등식 $\begin{cases} x+a \geq 3+2x \\ 3(x-1) \geq 2x-5 \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 의 개수가 5개

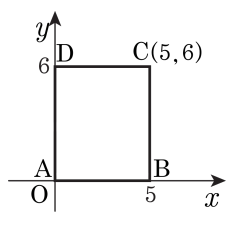
일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $5 \leq a < 6$ ② $5 < a \leq 6$ ③ $5 \leq a \leq 6$
④ $6 \leq a < 7$ ⑤ $6 < a \leq 7$

해설

1. $x+a \geq 3+2x$
 $x \leq a-3$
2. $3(x-1) \geq 2x-5$
 $x \geq -2$
 $\therefore -2 \leq x \leq a-3$ 만족하는 정수 x 의 개수가 5 개이므로
 $2 \leq a-3 < 3$
 $\therefore 5 \leq a < 6$

2. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 A(0,0), B(5,0), C(5,6), D(0,6)로 이루어진 □ABCD가 있다. $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는 점 P의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ③ (0,3)

- ④ (5,0) ⑤ (0,6)

해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD의 교점을

P라 하고 임의의 점 P'을 잡으면

$$\overline{P'A} + \overline{P'C} \geq \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{PC}$$

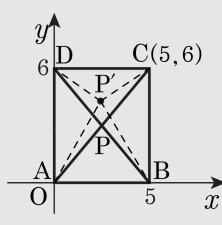
$$\overline{P'B} + \overline{P'D} \geq \overline{BD} = \overline{PB} + \overline{PD}$$

$$\therefore \overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D}$$

$$\geq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$$

즉, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는

점 P는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 이다.



3. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ 의
공통외접선의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

점 O' 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \overline{BO'} = 1$$

$$\therefore \overline{OH} = 2 - 1 = 1$$

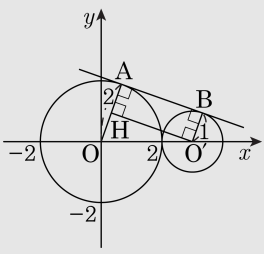
두 원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$, $(3, 0)$ 이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{AB} = \overline{O'H} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$



4. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

5. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① $-i$

② i

③ $-2i$

④ $3i$

⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 $\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
즉 ix (나머지 세 근의 곱)=1
 $\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$

6. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β 라 하면
네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$
 $\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

7. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$

$m = -1, 7$

8. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{5x+2}{3}-\frac{3}{2}x < 2 \\ \frac{3x-1}{4}-\frac{x}{2} > -1 \end{cases}$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$10x+4-9x < 12 \quad \therefore x < 8$
 $3x-1-2x > -4 \quad \therefore x > -3$
 $\therefore -3 < x < 8$
이므로 이를 만족하는 정수의 개수는 10개이다.

9. $3x-8 < -(2x+1)$, $\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$ 을 만족하는 x 의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$3x-8 < -(2x+1)$
 $\therefore x < 1.4$
 $\frac{x+3}{4} \leq \frac{x-1}{2}$
 $\therefore 5 \leq x$
 $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$, x 는 정수
 $\therefore -0.4 \leq x$
따라서 모두 만족하는 x 는 없으므로 0개이다.

10. $a-1 < x < a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1 < x < 3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$

② $0 \leq a \leq 2$

③ $a < 0, a > 2$

④ $a \leq 0, a \geq 2$

⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \geq -1$ 이고, $a+1 \leq 3$ 이어야 하므로

$$a \geq 0, a \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2$$

11. 1 개에 700 원 하는 콜라와 1 개에 600 원 하는 사이다를 합해서 20 개를 사려고 한다. 콜라를 사이다 보다 많이 사고 전체 금액이 13,500 원 이하가 되도록 하려고 한다. 콜라를 최소 a 개 살 수 있고, 최대 b 개 살 수 있다고 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 26$

해설

콜라의 개수를 x 개라고 놓으면 사이다의 개수는 $(20 - x)$ 개이다. 콜라를 사이다 보다 많이 사게 되면 $x > 20 - x$ 이다.

콜라와 사이다를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $700x + 600(20 - x)$ 이다. 또 전체 금액은 13,500 원 이하가 되어야 하기 때문에 $700x + 600(20 - x) \leq 13500$ 이다.

위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x > 20 - x \\ 700x + 600(20 - x) \leq 13500 \end{cases} \quad \text{이다.} \quad \text{이를 간단히 하면}$$

$$\begin{cases} x > 10 \\ x \leq 15 \end{cases} \quad \text{이다. 따라서 } 10 < x \leq 15 \text{ 이다. 그러므로 콜라}$$

는 최소로 11 개, 최대로 15 개 살 수 있다. 따라서 $a = 11$, $b = 15$ 이다.

따라서 $a + b = 11 + 15 = 26$ 이다.

12. 모든 실수 x 에 대하여, 부등식 $k(x^2 - (k-2)x - 3(k-2)) > 0$ 가 성립되게 하는 상수 k 값의 범위를 구하면?

- ① $0 < k < 2$ ② $1 < k < 2$ ③ $1 < k < 4$
④ $-1 < k < 3$ ⑤ $-2 < k < -1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$k > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 - (k-2)x - 3(k-2) > 0$ 이 항상 성립하려면

$$D = (k-2)^2 + 12(k-2) < 0 \text{에서}$$

$$(k-2)(k+10) < 0$$

$$\therefore -10 < k < 2 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 0 < k < 2$$

13. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$

② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$

④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$\therefore a = -4$$

$$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$\therefore b = -8$$

$$x^2 - 4x - 8 < 0$$

$$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$$

14. 이차부등식 $x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 의 해가 이차부등식 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해와 같을 때, 실수 a, c 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, x^2 - 5x > 0$
 $x(x - 5) > 0, x < 0$ 또는 $x > 5$
 $\therefore x > 5$
2) $x < 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > -3x + 3, x^2 + x - 6 > 0$
 $(x + 3)(x - 2) > 0, x < -3$ 또는 $x > 2$
 $\therefore x < -3$
1), 2)에서 $x < -3$ 또는 $x > 5$
한편 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해가
 $x < -3$ 또는 $x > 5$ 이므로
 $a < 0$ 이고, $ax^2 + 2x + c = a(x + 3)(x - 5)$ 이다.
 $ax^2 + 2x + c = ax^2 - 2ax - 15a$ 에서
 $a = -1, c = 15 \quad \therefore a + c = 14$

15. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a < 1$

② $1 \leq a < 2$

③ $2 \leq a < 3$

④ $3 \leq a < 4$

⑤ $4 \leq a < 5$

해설

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x - a)^2 - a^2 + a + 2$$

i) $D/4 = a^2 - a - 2 \geq 0, \quad a \leq -1 \text{ or } a \geq 2$

ii) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3$

iii) 대칭축 $x = a > 1$

i), ii), iii)에서 $2 \leq a < 3$

16. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 의 두 근이 -1 과 2 사이에 있도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $2 < a < \frac{5}{2}$

③ $-2 < a < 4$

④ $-2 < a < \frac{5}{2}$

⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$D > 0$ 에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a - 2)(a + 2) > 0$

$\therefore a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$ 에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1 과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore -2 < a < 4$

따라서 (i), (ii), (iii), (iv) 에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

17. 네 점 A(-2, 0), B(2, 0), C(2, 3), D(-2, 3)을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx + y - 2m = 0$ 에 의하여 이등분될 때, 상수 m 의 값은?

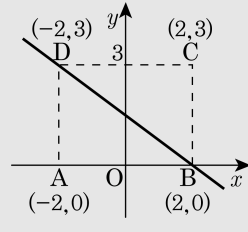
- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

직선 $mx + y - 2m = 0$

즉 $y = -m(x - 2)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 B(2, 0)을 지난다.

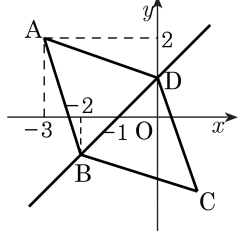
이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 D(-2, 3)을 지나야 한다.



따라서, D(-2, 3)을 대입하면 $3 = -m(-2 - 2)$ 이므로

$$\therefore m = \frac{3}{4}$$

18. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

19. 점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$ 는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $P(-4, 6)$

② $P(-4, -6)$

③ $P(2, 3)$

④ $P(3, 2)$

⑤ $P(-2, -4)$

해설

점 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 3$

위에 있으므로 $b = 2a - 3$

따라서 $y = ax + 2b$ 에서

$y = ax + 2(2a - 3)$ 이므로

a 에 대하여 정리하면

$$a(x + 4) - (6 + y) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a 에 대한
항등식이다.

$$\therefore x + 4 = 0, 6 + y = 0$$

$$\therefore P(-4, -6)$$

20. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

21. 중심이 직선 $y = x + 1$ 위에 있고 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라고 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y = x + 1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 (a, b) 이므로 $b = a + 1$
따라서 $(a, a + 1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로
$$\sqrt{(a-1)^2 + (a+1-6)^2}$$
$$= \sqrt{(a+3)^2 + (a+1-2)^2}$$
양변을 제곱하여 정리하면
$$(a-5)^2 = (a+3)^2$$
$$16a = 16$$
$$\therefore a = 1$$
$$\therefore (a, b) = (1, 2)$$
따라서 $a + b = 1 + 2 = 3$

22. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

23. 두 점 A(-4, 2), B(2, -1)로 부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y = 3x - 4$ 의 거리는?

- ① $\sqrt{2}$
- ② 2
- ③ $\sqrt{6}$
- ④ $2\sqrt{2}$
- ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$
$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$
$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$
$$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$$
$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$$
$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$$

원의 중심 (4, -2)와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

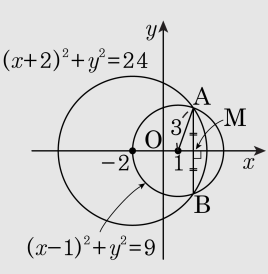
$$\therefore \frac{|12 + 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

24. 두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 와 $(x+2)^2 + y^2 = 24$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$,
 $(x+2)^2 + y^2 = 24$
즉, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,
 $x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ 의 공통
현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 2x - 8) -$
 $(x^2 + y^2 + 4x - 20) = 0$
 $-6x + 12 = 0 \quad \therefore x = 2$



$(x-1)^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 $x = 2$ 와의 거리 $d = 1$
따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$ 이고,
 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로 공통현의 길이는
 $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - 1} = 4\sqrt{2}$

25. 두 원 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 9$, $(x-1)^2 + (y+a)^2 = 1$ 이 직교하도록 하는 a 의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

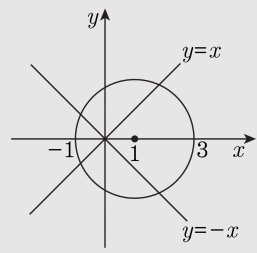
두 원의 중심이 각각 $(a, 2)$, $(1, -a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2 + (2+a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 3, 1 이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-1)^2 + (2+a)^2 = 3^2 + 1^2$
 $\therefore 2a^2 + 2a - 5 = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

26. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

- ① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\therefore x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$



$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 2^2$$

즉, 해는 4 개이다.

27. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 해를 α, β 라고 할 때, 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta, f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta, f(0) = -1$ 을 만족한다. 이 때 $ab + cd$ 의 값은?

- ① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근 : α, β ,
 $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$
 $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$,
 $f(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$ 이므로
 $f(x) - x = a(x - \alpha)(x - \beta) \{x - (\alpha + \beta)\}$
 $f(0) = -1 \Rightarrow -1 = -a\alpha\beta(\alpha + \beta)$
 $\therefore a = 1 (\because \alpha\beta = 1, \alpha + \beta = 1)$
 $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - 1) + x$
($\because \alpha + \beta = 1$)
 $f(x) = x^3 - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)x - \alpha\beta$
 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
 $\Leftrightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $a = 1, b = -2, c = 3, d = -1$
 $\therefore ab + cd = -2 - 3 = -5$

28. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x - 6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면
 $t^2 - 1 = 3^y, \quad (t - 1)(t + 1) = 3^y$
따라서, $t + 1, t - 1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2이므로 $y = 1$ 이다.
 $(t + 1, t - 1) = (3, 1), (-1, -3)$
 $\therefore t = 2, -2 \quad \therefore (x, y) = (8, 1), (4, 1)$
 $\therefore x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$

29. 2%의 소금물 200g 이하와 2.5%의 소금물 200g 이하를 섞은 후, 여기에 3.5%의 소금물을 더해서 3%의 소금물 600g을 만들려고 한다. 이 때, 3.5%의 소금물을 가능한 한 많이 섞으려고 한다면 몇 g까지 섞을 수 있겠는가?

▶ $\frac{1}{\sigma^2}$

▶ 정답 : 400g

애걸

2%의 소금물을 x g, 2.5%의 소금물을 y g, 3.5%의 소금물을 z g 사용하여 3%의 소금물 600g을 만들었다고 한다면

$$x + y + z = 600 \dots \textcircled{1}$$

$$x + y + z = 600 \dots \textcircled{1}$$

$$4x + 5y + 7z = 3600 \dots (2)$$

① ② 에 의하여 $-x + 2z =$

①, ②에 의하여 $-x + 2z = 600$
 $\therefore x = 2z - 600$

$$\therefore x = 2z - 600$$

그런데 $0 \leq x \leq 200$ 이므로

$$0 \leq 2z - 600 \leq 200$$

$$\therefore 300 \leq z \leq 400 \dots \textcircled{3}$$

또 ①, ②에 의하여 $y + 3z = 1200$

$$\therefore y = 1200 - 3z$$

그런데 $0 \leq y \leq 200$ 이므로

$$0 \leq 1200 - 3z \leq 200$$

$$1000 \leq \frac{1}{\alpha} \leq 400 \quad (4)$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에 의해서 } \frac{1000}{3} \leq z \leq 400$$

따라서 35% 이 스크루의 최대 400 α 까지 서으스이다.

30. 1 시간에 10ton 의 물이 유입되고 있는 댐이 있다. 이 댐에는 800ton 의 물이 있었다. 이 댐의 물을 방출하여 댐의 물이 200ton 이하가 되도록 하려고 한다. 매시간 일정한 양의 물을 방출하여 15 시간이 경과한 후, 남은 물의 양이 전체의 62.5% 가 되었다. 같은 양의 물을 방출한다면 댐의 물이 200ton 이하가 될 때까지 최소한 얼마의 시간이 걸릴 것인지 구하여라.

▶ 답: 시간

▷ 정답 : 15 시간

해설

15 시간 동안 줄어드는 물의 양은 $800 \times (1 - 0.625) = 300$ (톤)
이므로

1 시간당 댐에서 방출되는 물의 양을 x 톤이라 하면

$$(x - 10) \times 15 = 300$$

$$x = 30$$

현재 남아있는 물의 양은 500 톤이고 200 톤 이하가 되기 위해서는 300 톤 이상의 물이 추가로 줄어들어야한다.

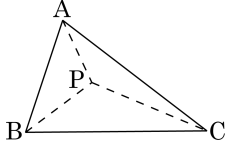
이를 위해 필요한 시간을 y 시간이라 하면

$$(30 - 10) \times y \geq 300$$

$$\therefore y \geq 15$$

따라서 댐의 물이 200 톤 이하가 되기 위해서는 최소 15 시간이 있어야 한다.

31. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$ 가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC의 길이는?



- ① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다. 따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$$

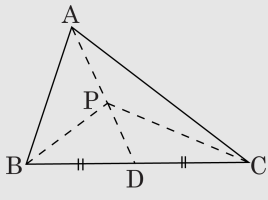
$$\therefore \overline{PD} = 2$$

$\triangle PBC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2)$$

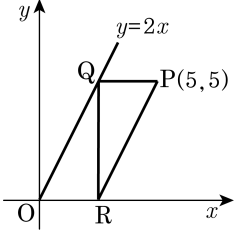
$$3^2 + 5^2 = 2(2^2 + \overline{BD}^2)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13}, \overline{BC} = 2\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$



32. 다음 그림에서 점 P(5, 5)와 직선 $y = 2x$ 위의 점 Q, x 축 위의 점 R에 대하여 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이의 최솟값은?

- ① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$
 ④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2



해설

$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP}$ 의 최솟값은 P를 $y = 2x$ 에 대해 대칭시킨 P' 와 x 축에 대해 대칭이동시킨 $P''(5, -5)$ 사이 거리와 같다.
 $P' = (a, b)$ 라하면 $\overline{PP'}$ 은 $y = 2x$ 에 수직이고 $\overline{PP'}$ 의 중점은 $y = 2x$ 위에 있다
 $\therefore P' = (1, 7)$
 $\therefore \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} \geq \overline{P'P''} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$

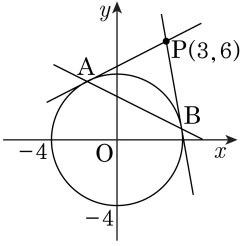
33. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$
- ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x - 3y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}, y = \pm \frac{4x - 3y}{5}$
기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

34. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 외부에 있는 점 P(3, 6) 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?



- ① $3x + 6y - 16 = 0$ ② $3x - 6y + 16 = 0$
 ③ $3x + 6y - 14 = 0$ ④ $3x - 6y + 14 = 0$
 ⑤ $x + 2y - 5 = 0$

해설

다음 그림에서 $\overline{PO} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 이고, $\triangle PAO$ 가 직각삼각형 이므로,

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 4^2} = \sqrt{29}$$

이 때, 점 P를 중심으로 하고,
 선분 PA 를 반지름으로 하는 원의
 방정식은

$$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 29 \text{ 이므로,}$$

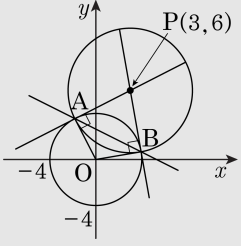
선분 AB 는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 과
 새로운 원 $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 29$ 의 공통현이다.
 따라서 직선 AB 의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 16) - \{(x - 3)^2 + (y - 6)^2 - 29\} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 16 - x^2 + 6x - 9 - y^2 + 12y - 36 + 29 = 0$$

$$6x + 12y - 32 = 0$$

$$\therefore 3x + 6y - 16 = 0$$



35. A지점에 있는 레이더화면에는 반경 $30\sqrt{3}km$ 내의 모든 선박이 나타난다고 한다. 지금 A지점의 서쪽 60km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 정방향으로 매시 12km의 속력으로 가고 있다. 이 배는 레이더 화면에 몇 시간 동안 나타나는가?
- ① 3시간 ② 3시간 30분 ③ 4시간
④ 5시간 ⑤ 6시간

해설

다음 그림에서 A 지점의 위치와 배의 처음 위치를 각각 A(0, 0), D(-60, 0) 이라 하면 배의 진행방향을 나타내는 직선의 방정식은 $y = x + 60$ ($\because$ 북동 정방향이면 직선과 x 축은 45° 의 각을 이루므로 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이다.)

배가 B , C 위치 사이에 있을 때 레이더 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한다.
A(0, 0) 에서 직선 $y = x + 60$ 에 이르는 거리는 $\frac{|60|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 30\sqrt{2}$
중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로 $\overline{BC} = 2\sqrt{(30\sqrt{3})^2 - (30\sqrt{2})^2} = 60(\text{km})$
따라서 배의 속력이 12km/h 이므로 이 배가 레이더 화면에 나타나는 시간은 $\frac{60}{12} = 5$ (시간) 이다.