1. 연립부등식 $\begin{cases} x+a \geq 3+2x \\ 3(x-1) \geq 2x-5 \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 의 개수가 5개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $5 \leq a < 6$ ② $5 < a \leq 6$ ③ $5 \leq a \leq 6$

④ $6 \leq a < 7$ ⑤ $6 < a \leq 7$

해설

1. $x+a \geq 3+2x$

$x \leq a-3$

2. $3(x-1) \geq 2x-5$

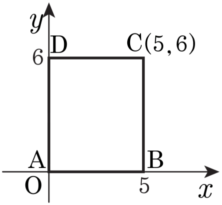
$x \geq -2$

$\therefore \quad -2 \leq x \leq a-3$ 만족하는 정수 x 의 개수가 5 개이므로

$2 \leq a-3 < 3$

$\therefore \quad 5 \leq a < 6$

2. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,6)$, $D(0,6)$로 이루어진 $\square ABCD$가 있다. $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$를 최소로 하는 점 P의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2},0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2},3\right)$ ③ $(0,3)$

④ $(5,0)$ ⑤ $(0,6)$

해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD의 교점을

P라 하고 임의의 점 P'을 잡으면

$\overline{P'A}+\overline{P'C} \geq \overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC}$

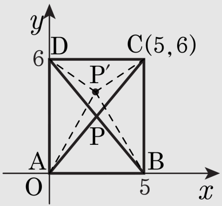
$\overline{P'B}+\overline{P'D} \geq \overline{BD}=\overline{PB}+\overline{PD}$

$\therefore\ \overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+\overline{P'D}$

$\geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

즉, $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$를 최소로 하는

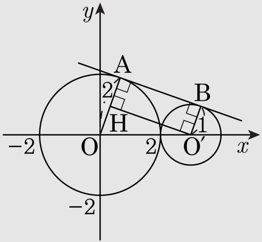
점 P는 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점 $\left(\frac{5}{2},3\right)$이다.



3. 두 원 $x^2+y^2=4$, $(x-3)^2+y^2=1$ 의 공통외접선의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설



주어진 두 원의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

점 O′ 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH}=\overline{BO'}=1$

$\therefore \overline{OH}=2-1=1$

두 원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 이므로

중심거리 $\overline{OO'}$ 은 3 이다.

따라서 $\triangle OO'H$ 에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}=\overline{O'H}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

4. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을
x^2 으로 나누면

$$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0$, $t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(i) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x$, $x^2+x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$$

5. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a,b는 실수)

① $-i$　　② i　　③ $-2i$

④ $3i$　　⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$

$(a+3)i+b-1=0$에서 a,b는 실수이므로 $a=-3, b=1$

따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$

한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$

우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$

따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고

$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.

$\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,

네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1

즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$

$\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i}=-i$

6. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면

네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$

$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

7. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라면

$\alpha+\beta=1-m\cdots$㉠, $\alpha\beta=m+1\cdots$㉡

㉠+㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ ($\alpha,\ \beta$는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

8. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{5x+2}{3} - \dfrac{3}{2}x < 2 \\ \dfrac{3x-1}{4} - \dfrac{x}{2} > -1 \end{cases}$$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 10 개

해설

$10x + 4 - 9x < 12 \quad \therefore \; x < 8$

$3x - 1 - 2x > -4 \quad \therefore \; x > -3$

$\therefore -3 < x < 8$

이므로 이를 만족하는 정수의 개수는 10개이다.

9. $3x-8 < -(2x+1)$, $\dfrac{x+3}{4} \leq \dfrac{x-1}{2}$, $0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$을 만족하는 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$3x-8 < -(2x+1)$

$\therefore \ x < 1.4$

$\dfrac{x+3}{4} \leq \dfrac{x-1}{2}$

$\therefore \ 5 \leq x$

$0.6(1-2x) \leq 0.3x+1.2$, x는 정수

$\therefore \ -0.4 \leq x$

따라서 모두 만족하는 x는 없으므로 0개이다.

10. $a-1<x<a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1<x<3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0<a<2$ ② $0\le a\le 2$ ③ $a<0,\ a>2$

④ $a\le 0,\ a\ge 2$ ⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1\ge -1$ 이고, $a+1\le 3$ 이어야 하므로

$a\ge 0,\ a\le 2$

$\therefore\ 0\le a\le 2$

11. 1 개에 700 원 하는 콜라와 1 개에 600 원 하는 사이다를 합해서 20 개를 사려고 한다. 콜라를 사이다 보다 많이 사고 전체 금액이 13,500 원 이하가 되도록 하려고 한다. 콜라를 최소 a 개 살 수 있고, 최대 b 개 살 수 있다고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=26$

해설

콜라의 개수를 x 개라고 놓으면 사이다의 개수는 $(20-x)$ 개이다.
콜라를 사이다 보다 많이 사게 되면 $x>20-x$ 이다.
콜라와 사이다를 샀을 때 전체 금액을 식으로 나타내면, $700x+600(20-x)$ 이다. 또 전체 금액은 13,500 원 이하가 되어야 하기 때문에 $700x+600(20-x)\le 13500$ 이다.
위의 두 부등식을 이용하여 연립방정식을 만들면

$$\begin{cases} x>20-x \\ 700x+600(20-x)\le 13500 \end{cases}$$

이다. 이를 간단히 하면

$$\begin{cases} x>10 \\ x\le 15 \end{cases}$$

이다. 따라서 $10<x\le 15$ 이다. 그러므로 콜라는 최소로 11 개, 최대로 15 개 살 수 있다. 따라서 $a=11$, $b=15$ 이다.
따라서 $a+b=11+15=26$ 이다.

12. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\}>0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$ ② $1<k<2$ ③ $1<k<4$

④ $-1<k<3$ ⑤ $-2<k<-1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$k>0\cdots$①

$x^2-(k-2)x-3(k-2)>0$이 항상 성립하려면

$D=(k-2)^2+12(k-2)<0$에서

$(k-2)(k+10)<0$

$\therefore\ -10<k<2\cdots$②

①, ②에서 $0<k<2$

13. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$

② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$

④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

14. 이차부등식 $x^2-2x-3>3|x-1|$의 해가 이차부등식 $ax^2+2x+c<0$의 해와 같을 때, 실수 a, c의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,

$x^2-2x-3>3x-3,\ x^2-5x>0$

$x(x-5)>0,\ x<0$ 또는 $x>5$

$\therefore x>5$

2) $x<1$ 일 때,

$x^2-2x-3>-3x+3,\ x^2+x-6>0$

$(x+3)(x-2)>0,\ x<-3$ 또는 $x>2$

$\therefore x<-3$

1), 2) 에서 $x<-3$ 또는 $x>5$

한편 $ax^2+2x+c<0$ 의 해가

$x<-3$ 또는 $x>5$ 이므로

$a<0$ 이고, $ax^2+2x+c=a(x+3)(x-5)$ 이다.

$ax^2+2x+c=ax^2-2ax-15a$ 에서

$a=-1, c=15 \quad \therefore a+c=14$

15. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$　② $1 \le a < 2$　③ $2 \le a < 3$

④ $3 \le a < 4$　⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$

i) $D/4 = a^2 - a - 2 \ge 0$,　$a \le -1$ or $a \ge 2$

ii) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0$　$\therefore a < 3$

iii) 대칭축 $x = a > 1$

i), ii), iii) 에서 $2 \le a < 3$

16. 이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$의 두 근이 -1과 2 사이에 있도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a > 2$ 또는 $a < -2$

② $2 < a < \frac{5}{2}$

③ $-2 < a < 4$

④ $-2 < a < \frac{5}{2}$

⑤ $a > \frac{5}{2}$ 또는 $a < -2$

해설

(i) 방정식이 두 근을 가지므로

$D > 0$에서 $D = a^2 - 4 > 0$, $(a-2)(a+2) > 0$

$\therefore\ a > 2$ 또는 $a < -2$

(ii) $f(-1) > 0$에서 $1 + a + 1 > 0$

$\therefore\ a > -2$

(iii) $f(2) > 0$ 에서 $4 - 2a + 1 > 0$

$\therefore\ \frac{5}{2} > a$

(iv) 대칭축이 -1과 2 사이에 있어야 하므로

$-1 < \frac{a}{2} < 2$

$\therefore\ -2 < a < 4$

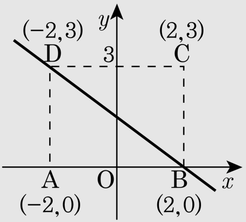
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 $2 < a < \frac{5}{2}$

17. 네 점 $A(-2,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(2,\ 3)$, $D(-2,\ 3)$을 꼭지점으로 하는 직사각형 ABCD의 넓이가 직선 $mx+y-2m=0$에 의하여 이등분될 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

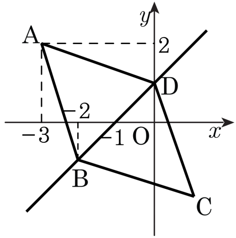
직선 $mx+y-2m=0$
즉 $y=-m(x-2)$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $B(2,\ 0)$을 지난다.
이 때, 이 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하므로 점 $D(-2,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서, $D(-2,\ 3)$을 대입하면 $3=-m(-2-2)$이므로

$\therefore\ m=\frac{3}{4}$

18. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD 의 중점은 $M(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1,

점 B 와 점 D 의 y값을 a, b 라 하면

$b-a=2,\ \dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1,\ b=1$ 이다.

$\therefore\ D(0,\ 1)$

$\overline{AM}=2\sqrt{2},\ \overline{MD}=\sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD 의 넓이는

$4\left(\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$

19. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P$(-4,\ 6)$ ② P$(-4,\ -6)$ ③ P$(2,\ 3)$

④ P$(3,\ 2)$ ⑤ P$(-2,\ -4)$

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore\ x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

20. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0$, $x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$$ 정리하면

$$\begin{cases} y=\frac{2}{a}x-\frac{2}{a} \\ y=\frac{1}{a-3}x-\frac{3}{a-3} \end{cases}$$ 평행하므로

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{a-3}$$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$$

$x-3y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$ 과 $x-3y-3=0$ 과의 거리는

$$\therefore\ \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

21. 중심이 직선 $y=x+1$ 위에 있고 두 점 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$를 지나는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심이 $y=x+1$ 위에 있고,
중심의 좌표가 $(a,\ b)$ 이므로 $b=a+1$
따라서 $(a,\ a+1)$ 이라 할수 있다.
중심과 $(1,\ 6)$, $(-3,\ 2)$ 간의 거리가 반지름으로 같으므로

$$\sqrt{(a-1)^2+(a+1-6)^2}$$
$$=\sqrt{(a+3)^2+(a+1-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$(a-5)^2=(a+3)^2$$
$$16a=16$$
$$\therefore\ a=1$$
$$\therefore\ (a,\ b)=(1,\ 2)$$

따라서 $a+b=1+2=3$

22. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}=14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}+\overline{\mathrm{C_2C_3}}+\overline{\mathrm{C_3C_4}}$

$=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2+\left(-\frac{1}{2}r\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2+\left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$

$+\sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2+\left(\frac{1}{8}r\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{10}}{2}r+\frac{\sqrt{10}}{4}r+\frac{\sqrt{10}}{8}r$

$=\frac{7\sqrt{10}}{8}r=14\sqrt{10}$

$\therefore r=16$

23. 두 점 $A(-4,\ 2)$, $B(2,\ -1)$로 부터의 거리의 비가 $2:1$ 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y=3x-4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$　　② 2　　③ $\sqrt{6}$　　④ $2\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

$2\overline{BP}=\overline{AP}$

$4\overline{BP}^2=\overline{AP}^2$

$4\cdot\left\{(x-2)^2+(y+1)^2\right\}=(x+4)^2+(y-2)^2$

$3x^2+3y^2-24x+12y=0$

$(x-4)^2+(y+2)^2=20$

원의 중심 $(4,\ -2)$와 직선 $3x-y-4=0$ 간의 거리

$\therefore\ \dfrac{|12+2-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

24. 두 원 $(x-1)^2+y^2=9$와 $(x+2)^2+y^2=24$의 공통현의 길이를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

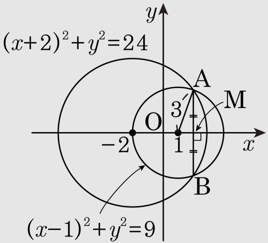
해설

두 원 $(x-1)^2+y^2=9$, $(x+2)^2+y^2=24$

즉, $x^2+y^2-2x-8=0$, $x^2+y^2+4x-20=0$의 공통현의 방정식은

$\left(x^2+y^2-2x-8\right)-\left(x^2+y^2+4x-20\right)=0$

$-6x+12=0 \quad \therefore x=2$



$(x-1)^2+y^2=9$의 중심 $(1,\ 0)$과 $x=2$와의 거리 $d=1$

따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$이고,

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 공통현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$

25. 두 원 $(x-a)^2+(y-2)^2=9$, $(x-1)^2+(y+a)^2=1$이 직교하도록 하는 a의 값의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{5}{2}$

해설

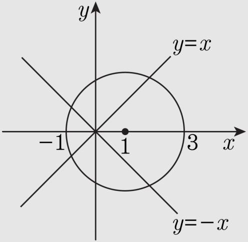
두 원의 중심이 각각 $(a,\ 2)$, $(1,\ -a)$이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-1)^2+(2+a)^2}$이다.
두 원의 반지름은 각각 $3,\ 1$이므로
직교하기 위한 조건은
$(a-1)^2+(2+a)^2=3^2+1^2$
$\therefore\ 2a^2+2a-5=0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

26. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$



$\therefore\ (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

즉, 해는 4 개이다.

27. x에 관한 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 해를 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta,\ f(0)=-1$을 만족한다. 이 때 $ab+cd$의 값은?

① -5　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 5

해설

$x^2-x+1=0$의 두 근 : $\alpha,\ \beta,$

$\alpha+\beta=1\ ,\ \alpha\beta=1$

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,$

$f(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$이므로

$f(x)-x=a(x-\alpha)(x-\beta)\left\{x-(\alpha+\beta)\right\}$

$f(0)=-1 \Rightarrow -1=-a\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore a=1(\because \alpha\beta=1, \alpha+\beta=1)$

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)+x$

$(\because\ \alpha+\beta=1)$

$f(x)=x^3-(\alpha+\beta+1)x^2+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)x-\alpha\beta$

$f(x)=x^3-2x^2+3x-1$

$\Leftrightarrow f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=1, b=-2, c=3, d=-1$

$\therefore\ ab+cd=-2-3=-5$

28. 방정식 $x^2 - 12x + 35 = 3^y$ 을 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x_1 + x_2 + y_1 + y_2$ 의 값을 구하면?

① 10　　② 11　　③ 12　　④ 13　　⑤ 14

해설

$x^2 - 12x + 35 = (x-6)^2 - 1 = 3^y$ 에서 $x - 6 = t$ 라 하면

$t^2 - 1 = 3^y, \quad (t-1)(t+1) = 3^y$

따라서, $t+1,\ t-1$ 은 3^n 꼴이고 차가 2 이므로 $y = 1$ 이다.

$(t+1,\ t-1) = (3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ t = 2,\ -2 \quad \therefore\ (x,\ y) = (8,\ 1),\ (4,\ 1)$

$\therefore\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 14$

29. 2 % 의 소금물 200g 이하와 2.5 % 의 소금물 200g 이하를 섞은 후, 여기에 3.5 % 의 소금물을 더해서 3 % 의 소금물 600g 을 만들려고 한다. 이 때, 3.5 % 의 소금물을 가능한 한 많이 섞으려고 한다면 몇 g 까지 섞을 수 있겠는가?

▶ 답 : g

▷ 정답 : 400 g

해설

2 % 의 소금물을 xg , 2.5 % 의 소금물을 yg , 3.5 % 의 소금물을 zg 사용하여 3 % 의 소금물 600g 을 만들었다고 한다면

$x + y + z = 600 \cdots ①$

$0.02x + 0.025y + 0.035z = 600 \times 0.03$

$4x + 5y + 7z = 3600 \cdots ②$

①, ② 에 의하여 $-x + 2z = 600$

$\therefore x = 2z - 600$

그런데 $0 \le x \le 200$ 이므로

$0 \le 2z - 600 \le 200$

$\therefore 300 \le z \le 400 \cdots ③$

또 ①, ② 에 의하여 $y + 3z = 1200$

$\therefore y = 1200 - 3z$

그런데 $0 \le y \le 200$ 이므로

$0 \le 1200 - 3z \le 200$

$\therefore \dfrac{1000}{3} \le z \le 400 \cdots ④$

③, ④ 에 의해서 $\dfrac{1000}{3} \le z \le 400$

따라서 3.5 % 의 소금물은 최대 400g 까지 섞을 수 있다.

30. 1 시간에 10ton 의 물이 유입되고 있는 댐이 있다. 이 댐에는 800ton 의 물이 있었다. 이 댐의 물을 방출하여 댐의 물이 200ton 이하가 되도록 하려고 한다. 매시간 일정한 양의 물을 방출하여 15 시간이 경과한 후, 남은 물의 양이 전체의 62.5 % 가 되었다. 같은 양의 물을 방출한다면 댐의 물이 200ton 이하가 될 때까지 최소한 얼마의 시간이 걸릴 것인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 시간

▷ 정답 : 15 시간

해설

15 시간 동안 줄어든 물의 양은 $800 \times (1 - 0.625) = 300$ (톤) 이므로

1 시간당 댐에서 방출되는 물의 양을 x톤이라 하면

$(x - 10) \times 15 = 300$

$x = 30$

현재 남아있는 물의 양은 500 톤이고 200 톤 이하가 되기 위해서는 300 톤 이상의 물이 추가로 줄어들어야한다.

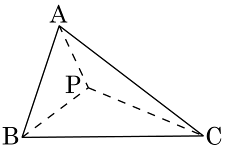
이를 위해 필요한 시간을 y시간이라 하면

$(30 - 10) \times y \geq 300$

$\therefore y \geq 15$

따라서 댐의 물이 200 톤 이하가 되기 위해서는 최소 15 시간이 있어야 한다.

31. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$가 되었다고 한다. 이 때, 선분 BC 의 길이는?

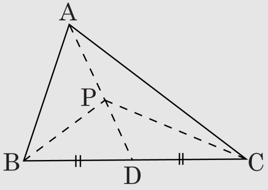


① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.

따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면



$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

$\therefore \overline{PD} = 2$

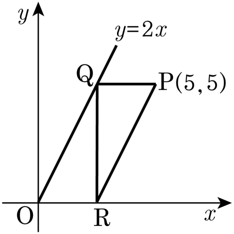
$\triangle PBC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13},\ \overline{BC} = 2\cdot\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$

32. 다음 그림에서 점 $P(5,5)$와 직선 $y=2x$ 위의 점 Q, x축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle PQR$의 둘레의 길이의 최솟값은?



① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2

해설

$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}$의 최솟값은 P를 $y=2x$에 대해 대칭시킨 P'와 x축에 대해 대칭이동시킨 $P''(5,-5)$ 사이 거리와 같다.

$P'=(a,b)$라하면 $\overline{PP'}$은 $y=2x$에 수직이고

$\overline{PP'}$의 중점은 $y=2x$ 위에 있다

$\therefore\ P'=(1,\ 7)$

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{PR} \geq \overline{P'P''}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

33. 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 와 x 축이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식을 구할 때 기울기는? (단, 기울기는 양수이다.)

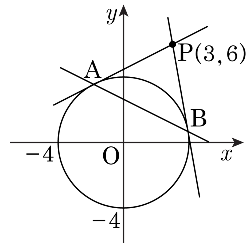
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

각의 이등분선은 각의 두 변에서 같은 거리에 있는 점들이다. 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 에서 각의 두 변인 x 축과 직선 $y = \frac{4}{3}x$ 에 이르는 거리는 같다. $|y| = \frac{|4x-3y|}{\sqrt{3^2+4^2}}$, $y = \pm\frac{4x-3y}{5}$

기울기가 양수이므로 $y = \frac{1}{2}x$, 기울기는 $\frac{1}{2}$

34. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$ 의 외부에 있는 점 P(3, 6) 에서 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 직선 AB 의 방정식은?



① $3x+6y-16=0$　② $3x-6y+16=0$

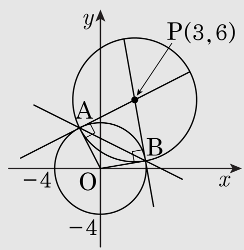
③ $3x+6y-14=0$　④ $3x-6y+14=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

다음 그림에서 $\overline{\mathrm{PO}}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ 이고, $\triangle\mathrm{PAO}$가 직각삼각형이므로,

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-4^2}=\sqrt{29}$



이 때, 점 P를 중심으로 하고, 선분 PA 를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 이므로,

선분 AB 는 원 $x^2+y^2=16$ 과

새로운 원 $(x-3)^2+(y-6)^2=29$ 의 공통현이다.

따라서 직선 AB 의 방정식은

$(x^2+y^2-16)-\{(x-3)^2+(y-6)^2-29\}=0$

$x^2+y^2-16-x^2+6x-9-y^2+12y-36+29=0$

$6x+12y-32=0$

$\therefore\ 3x+6y-16=0$

35. A지점에 있는 레이더화면에는 반경 $30\sqrt{3}km$ 내의 모든 선박이 나타난다고 한다. 지금 A지점의 서쪽 60km 해상에서 한 척의 배가 북동쪽 정방향으로 매시 12km의 속력으로 가고 있다. 이 배는 레이더 화면에 몇 시간 동안 나타나는가?

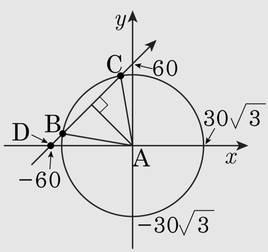
① 3시간　　② 3시간 30분　　③ 4시간

④ 5시간　　⑤ 6시간

해설

다음 그림에서 A 지점의 위치와 배의 처음 위치를 각각 A(0, 0), D(−60, 0) 이라 하면 배의 진행방향을 나타내는 직선의 방정식은

$y = x + 60$ (∵ 북동 정방향이면 직선과 x 축은 $45°$ 의 각을 이루므로 직선의 기울기는 $\tan 45° = 1$ 이다.)



배가 B , C 위치 사이에 있을 때 레이더 화면에 나타나므로 $\overline{BC}$ 의 길이를 구한다.

A(0, 0) 에서 직선 $y = x + 60$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|60|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 30\sqrt{2}$$

중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로

$$\overline{BC} = 2\sqrt{(30\sqrt{3})^2 - (30\sqrt{2})^2} = 60(\text{km})$$

따라서 배의 속력이 12 km/h 이므로

이 배가 레이더 화면에 나타나는 시간은

$$\frac{60}{12} = 5\ (\text{시간})\ \text{이다.}$$