1. 다음 보기에서 집합인 것을 모두 고른것은?

보기

㉠ 10 보다 큰 홀수의 모임

㉡ 1 에 가까운 수의 모임

㉢ 요일의 모임

㉣ 마른 사람의 모임

㉤ 예쁜 꽃들의 모임

㉥ 100 보다 작은 짝수의 모임

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉣, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉥ ⑤ ㉠, ㉣, ㉥

해설

㉠ : 11, 13, 15, $\cdots$
㉢ : 월, 화, 수, $\cdots$, 일
㉥ : 2, 4, 6, $\cdots$, 94, 96, 98
㉡, ㉣, ㉤은 기준이 분명하지 않다.

2. 다음 중에서 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 과 같은 집합을 모두 고른 것은?

㉠ $\{2n \mid 0 < n < 5$인 정수$\}$

㉡ $\{x \mid x$는 2의 배수$\}$

㉢ $\{2x - 2 \mid x$는 $1 < x \le 5$인 정수$\}$

㉣ $\{x \mid x$는 8의 양의 약수$\}$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉣　④ ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉣

해설

㉠ 2, 4, 6, 8 이므로 가능하다.
㉡ 2, 4, 6, 8, 10, ... 이므로 불가능하다.
㉢ 2, 4, 6, 8 이므로 가능하다.
㉣ 1, 2, 4, 8 이므로 불가능하다.

3. 두 집합 $A = \{1, a\}, B = \{2, 3, a-2\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{1, 3\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 집합 A, B 는 $A \cap B$ 를 포함한다.
$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $\{1, 3\} \subset \{1, a\}$, $\{1, 3\} \subset \{2, 3, a-2\}$ 이다.
따라서 $a = 3$ 이다.

4. 집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중 진부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 31 개

해설

진부분집합은 부분집합 중에 자기 자신만을 제외한 것이므로, 진부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수보다 1 개가 적다. 따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는 $2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$ (개) 이다.

5. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ 일 때, $A \cup X = A$ 이고 $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____ 개

▷ 정답: 4개

해설

$(A \cap B) \subset X \subset A$ 이므로
$\{2,\ 4\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다.
집합 X는 2, 4를 원소로 갖는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^{4-2} = 2^2 = 4$(개) 이다.

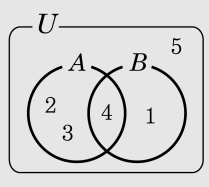
6. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 이고 A, B 가 다음 조건을 만족할 때, 집합 B 의 부분집합인 것은?

㉠ $A \cap B = \{4\}$	㉡ $A - B = \{2, 3\}$
㉢ $(A \cup B)^c = \{5\}$	

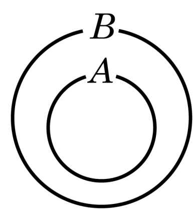
① $\{2\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{2, 3\}$ ④ $\{2, 5\}$ ⑤ $\{4\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 $B = \{1, 4\}$ 이다. 따라서 B 의 부분집합인 것은 $\{4\}$ 이다.



7. 다음 벤 다이어그램과 같은 포함 관계일 때, 옳지 <u>않은</u> 것은?



① $A \cap B = A$ ② $A - B = \varnothing$

③ $A \cup B = B$ ④ $A \subset B$

⑤ $(A \cup B) - B = A$

해설

⑤ $(A \cup B) - B = \varnothing$

8. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 52$, $n(A \cup B) = 87$, $A \cap B = \varnothing$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$87 = 52 + n(B) - 0$
$\therefore\ n(B) = 35$

9. a, b, c 가 실수일 때, '$a^2 + b^2 + c^2 = 0$ 이다' 의 부정은?

① $a = 0$ 또는 $b = 0$ 또는 $c = 0$

② $abc \neq 0$

③ $a \neq b \neq c$

④ a, b, c 모두 0 이 아니다.

⑤ a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

해설

$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \leftrightarrow a = b = c = 0$, $a = b = c = 0$ 의 부정은 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$ 이다.
즉, a, b, c 중 적어도 하나는 0 이 아니다.

10. 두 조건 $p : 2 \le x < 5$, $q : a+1 < x < a+9$ 에 대하여 명제 $p \to q$ 가 참이 되도록 하는 정수 a 의 모든 값의 합은?

① -10 ② -9 ③ -6 ④ -5 ⑤ -3

해설

조건 p 를 만족하는 진리집합을 P, 조건 q 를 만족하는 진리집합을 Q 라 하면 $p \to q$ 이려면 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다.
$a+1 < 2$ 이고 $a+9 \ge 5$ 이므로 $a < 1$, $a \ge -4$
따라서 $-4 \le a < 1$ 이므로 만족하는 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0$ 이고 합은 -10 이다.

11. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r에 대하여 다음 추론 중에서 옳은 것은?

① $p \Rightarrow \sim q$, $r \Rightarrow q$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

② $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow q$ 이면 $\sim p \Rightarrow r$ 이다.

④ $q \Rightarrow p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

⑤ $q \Rightarrow \sim p$, $\sim q \Rightarrow r$ 이면 $p \Rightarrow r$ 이다.

해설

① $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
② $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
③ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
④ $\sim p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim p \Rightarrow r$
⑤ $p \Rightarrow \sim q$, $\sim q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

12. 다음 부등식에 관한 설명 중에서 옳은 것은? (단, a, b, x, y는 실수임)

① $a \geq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$

② $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$(단, $ax = by$일 때, 등호성립)

④ $a^2 + b^2 \geq ab$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

⑤ 두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$(단, $a = b$일 때, 등호 성립)

해설

②의 반례 : a, b가 음수인 경우

③ $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$= (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2)$

$-(a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2)$

$= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2$

$= (ay - bx)^2 \geq 0$단, 등호는 $ay = bx$일때 성립

④ $a^2 + b^2 - ab$

$= \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

등호는 $a = b = 0$일때 성립

⑤ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

($\because$ 산술평균 $\geq$ 기하평균 $\geq$ 조화평균)

13. 전체집합 $\{x \mid 1 \le x \le 10,\ x$ 는 정수$\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 4, 6\}$ 가 있다. $A \cup X = B \cup X$ 가 성립하는 U 의 부분집합 X 의 개수를 구하면?

① 16 개　② 32 개　③ 64 개
④ 128 개　⑤ 256 개

해설

$A \cup X = B \cup X$ 가 성립하려면 X 에 $A \cap B$ 의 원소는 들어 있어도 되고 들어 있지 않아도 상관없다. 그러나 그 외의 A, B 의 원소는 반드시 들어 있어야 한다. 즉 집합 X 는 $2, 3, 8, 10$ 이 모두 포함된 U 의 부분집합이다.
$\therefore \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 $2^6 = 64$(개) 이다.

14. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A = \{a^2-2a-1, 3\}$, $B = \{2, 4-a, 2a^2-a\}$ 에 대하여 $B - A^c = \{2\}$ 일 때, $A \cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

① 10 ② 16 ③ 21 ④ 25 ⑤ 30

해설

$B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = \{2\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 2가 들어있다.
따라서 $a^2 - 2a - 1 = 2$, $a^2 - 2a - 3 = 0$
$\therefore a = -1, a = 3$ 이다.
i) $a = -1$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$
$\therefore A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 부적당
i) $a = 3$ 일 때, $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, 15\}$
$A \cap B = \{2\}$이고, 이 때 $A \cup B = \{1, 2, 3, 15\}$
따라서 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 21 이다.

15. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 하면 $P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참인 명제가 <u>아닌</u> 것은?

① $r \to p$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $\sim p \to \sim r$

④ $\sim r \to \sim p$　　⑤ $\sim q \to \sim r$

해설

$P \cup Q = P, Q \cap R = R$ 이면
$Q \subset P, R \subset Q$ 이므로 $q \to p$, $r \to q$ 가 참
$R \subset Q \subset P$ 이므로 $r \to p$ 가 참
$Q \subset P, R \subset Q$ 이면 $Q^c \supset P^c, R^c \supset Q^c$ 이므로 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 이 참

해설

'주어진 명제가 참일 때, 그 대우도 참'을 이용하여 $q \to p$, $r \to q$ 가 참이면 $\sim p \to \sim q$, $\sim q \to \sim r$ 가 참임을 쉽게 판단할 수 있다.