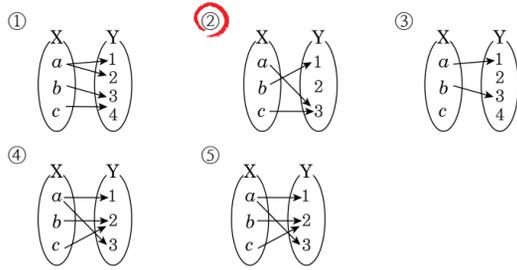


1. 다음 대응 중 함수인 것은?



해설

집합 X 의 모든 원소 각각에 대하여 집합 Y 의 원소가 하나씩만 대응하여야 하므로 함수의 정의에 맞는 것은 ②번이다.

2. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{y|y \text{는 정수}\}$ 일 때, 함수 $f : X \rightarrow Y$ 를 다음과 같이 정의한다. 이 때, f 의 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x > 0) \\ -x^2+1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(-2) = -(-2)^2 + 1 = -3$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

따라서 치역은 $\{-3, 0, 1, 3, 4\}$ 이므로

$$\text{모든 원소의 합은 } (-3) + 0 + 1 + 3 + 4 = 5$$

3. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

② $y = \frac{1}{2}x + 1$

③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

④ $y = \frac{1}{2}x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

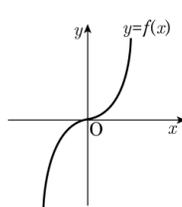
해설

$y = 2x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면

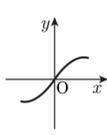
$x = \frac{1}{2}y + 1$ 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1$

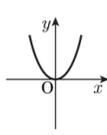
4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은 무엇인가?



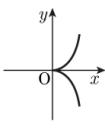
①



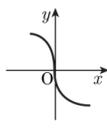
②



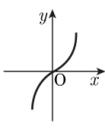
③



④



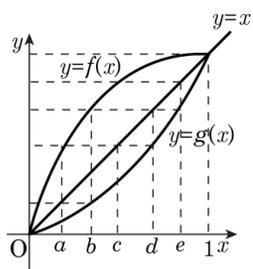
⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

5. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$ 의 값은 얼마인가?



- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$ 를 이용하여 함수값을 구한다.
 $f^{-1}(d) = x$ 라 하면,
 $f(x) = d \quad \therefore x = b$
 $\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$
 $= (f \circ g)(f^{-1}(d))$
 $= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

6. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5, g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

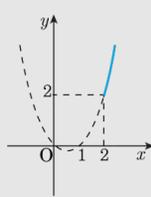
$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

7. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
 (정의역)=(공역)이므로
 (정의역)=(치역)이 되어야 한다.
 즉, $f(k) = k$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
 (i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
 $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
 (ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
 $\therefore k = 2$



8. 두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f \circ g)(x) = (x+2)^2$ ② $(f \circ g)(x) = x^2 + 2$

③ $(f \circ g)(x) = (x-2)^2$ ④ $(f \circ g)(x) = x^2 - 2$

⑤ $(f \circ g)(x) = -x^2 + 2$

해설

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ 에 대하여
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

9. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 1, g(x) = 4x + a \text{ 이므로} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x + 1) \\ &= 4(3x + 1) + a \\ &= 12x + 4 + a \end{aligned}$$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$
 $\therefore a = 3$

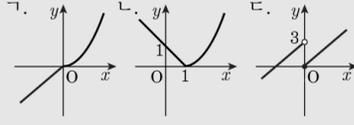
10. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

$$\begin{aligned} \text{㉠ } f(x) &= \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases} \\ \text{㉡ } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 1) \\ 1 - x & (x < 1) \end{cases} \\ \text{㉢ } f(x) &= \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x + 3 & (x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때
 역함수가 존재한다.
 이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 함수 ㉠이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

11. $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), $g(x) = x + c$ 라 할 때, $(f \circ g)(x) = 2x - 3$, $f^{-1}(3) = -2$ 가 성립한다. 상수 a, b, c 의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 7$

▷ 정답: $c = -5$

해설

$$(f \circ g)(x) = f(x + c) = a(x + c) + b = ax + ac + b$$

$$\therefore a = 2 \cdots \text{㉠}$$

$$ac + b = -3 \cdots \text{㉡}$$

$$f^{-1}(3) = -2 \text{이므로, } f(-2) = 3$$

$$\therefore -2a + b = 3 \cdots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, b = 7, c = -5$$

12. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4 ② 3 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

$$f^{-1} \text{이므로 } f \circ f = I$$

$$(f \circ f)(x) = x \text{에서}$$

$$f(f(x)) = f(kx + 1) = k(kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$$

$$\therefore k^2 = 1, k + 1 = 0 \text{ 따라서 } k = -1$$

13. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

14. 집합 $X = \{0, 1, 2\}$ 에서 세 함수 f, g, h 는 각각 X 에서 X 로의 일대일 대응, 상수함수, 항등함수이고, 다음 두 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \neg. & f(0) = g(1) = h(2) \\ \neg. & 2f(1) + f(2) = f(0) \end{aligned}$$

이때, $f(2) + g(2) + h(2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$h(x)$ 가 항등함수이므로 $h(2) = 2$
조건 \neg 에 의해, $f(0) = g(1) = h(2) = 2$
 $g(x)$ 는 상수함수이므로 $g(0) = g(1) = g(2) = 2$
 $f(x)$ 는 일대일 대응이고 $f(0) = 2$ 이므로
 $f(1) = 0, f(2) = 1$ 또는 $f(1) = 1, f(2) = 0$
(i) $f(1) = 0, f(2) = 1$ 일 때
 $2f(1) + f(2) = 1 \neq 2 = f(0)$
(ii) $f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때
 $2f(1) + f(2) = 2 = f(0)$
(i), (ii)에 의해
조건 \neg 을 만족하는 것은
 $f(1) = 1, f(2) = 0$ 일 때이다.
 $\therefore f(2) + g(2) + h(2) = 0 + 2 + 2 = 4$

15. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 21개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.

X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$

X 에서 X 로의 일대일대응의 개수

: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$

$\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

17. 두 함수 $f(x) = 2x+5$, $g(x) = -3x+k$ 에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?

① -20 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \text{에서} \\ -6x + 2k + 5 &= -6x - 15 + k \\ \therefore k &= -20\end{aligned}$$

18. 정의역이 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2$ 를 만족시킨다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$f\left(\frac{x+4}{2}\right) = 3x+2 \text{ 에서}$$

$$\frac{x+4}{2} = 2 \text{ 이면 } x = 0 \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

19. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}$, $g(x) = 3x - 1$ 에 대하여 $(f \circ g^{-1})(2)$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 3 ③ 6 ④ 8 ⑤ 11

해설

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \geq 2) \\ 2x + 1 & (x < 2) \end{cases}, g(x) = 3x - 1 \quad g^{-1}(2) = a \text{ 라고 하면}$$
$$g(a) = 2, 3a - 1 = 2$$
$$\therefore a = 1 \text{ 이므로 } (f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1)$$
$$\therefore f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \quad (\because 1 < 2)$$

20. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

21. $5x + 2 \leq 4x + 5$ 이고 x 는 자연수 일 때, 다음 이차방정식을 풀면?

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

- ① $x = 1, x = 3$ ② $x = 1, x = 5$ ③ $x = 1$
④ $x = 2, x = 3$ ⑤ $x = 2, x = 5$

해설

$5x + 2 \leq 4x + 5$ 에서 $x \leq 3$ 이다.
따라서 x 의 값은 1, 2, 3이다.
 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 를 만족하는 x 의 값은 $x = 1, x = 5$ 이므로
이차방정식의 해는 $x = 1$ 이다.

22. $7x - 5 < 4(x + 1)$ 이고 x 는 자연수일 때, $x^2 - 5x + 6 = 0$ 를 풀면?

- ① $x = 0, x = 1$ ② $x = 2$ ③ $x = 2, x = 3$
④ $x = 3$ ⑤ $x = -2, x = 3$

해설

$7x - 5 < 4(x + 1)$ 에서 $7x - 4x < 4 + 5, 3x < 9 \therefore x < 3$
따라서 x 의 값은 1, 2이다.
 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해는 $x = 2, x = 3$ 이므로 해는 $x = 2$ 가 된다.

23. 이차방정식 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 p, q 라고 할 때, $(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $-\frac{3}{4}$

해설

$x = p$ 를 대입하면 $2p^2 - 2p - 1 = 0$, $2p^2 - 2p = 1$ 이므로

$p^2 - p = \frac{1}{2}$ 이다.

$x = q$ 를 대입하면 $2q^2 - 2q - 1 = 0$, $2q^2 - 2q = 1$ 이므로

$q^2 - q = \frac{1}{2}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned}(p^2 - p - 1)(q^2 - q + 1) &= \left(\frac{1}{2} - 1\right) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{4} \text{ 이다.}\end{aligned}$$

24. 이차방정식 $5x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근의 합이 1 이고, 큰 근이 작은 근보다 5 가 클 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

두 근을 $e, f (e > f)$ 라 하면 $e = f + 5$ 이고, $e + f = 1$ 이므로
연립하면 $e = 3, f = -2$ 이다.

따라서 두 근은 3, -2 이다.

3, -2 를 두 근으로 $5x^2 - ax + b = 0$ 에 대입하여 연립하면
 $a = 5, b = -30$ 가 나온다.

따라서 $a + b = 5 + (-30) = -25$ 이다.

25. $x^2 - 5x + 1 = 0$ 일 때, $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 28

해설

$x^2 - 5x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 25 - 2 + 5 = 28 \end{aligned}$$