1. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 11

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-4$라 하면

$f(2)=4a+2b+4=0 \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1)=a-b-5=6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3,\ b=-8$

$\therefore\ a-b=11$

2. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 $a,\ b$ 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b=5,\ a=3$
$\therefore\ a+b=8$

3. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개 ② 3 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\dfrac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

5. 연립부등식 $4x-3<-6(1-x)<7x-2$ 의 해 중 가장 작은 정수를 구하면?

① 3　② 2　③ 1　④ 0　⑤ −1

해설

$$\begin{cases}4x-3<-6(1-x)\\-6(1-x)<7x-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3}{2}\\x>-4\end{cases}$$

연립부등식의 해가 $x>\dfrac{3}{2}$ 이므로 가장 작은 정수는 2이다.

6. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b\cdots$ ①
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b\cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ a+b=-7$

7. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하면? $\left(\text{단, } x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정)라 놓으면

$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x+(3a-2k)=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-4k=0$, $3a-2k=0$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

8. 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 x^2-x-12로 나눈 나머지가 $14x-9$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$라 하면
x^3+ax^2+bx+3
$=(x^2-x-12)Q(x)+14x-9$
$=(x-4)(x+3)Q(x)+14x-9$
$x=4,\ x=-3$을 각각 대입하면
$16a+4b+67=47\cdots$㉠
$9a-3b-24=-51\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$
$\therefore\ a+b=1$

9. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$\quad B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

10. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$이다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A = Ga, B = Gb$(a, b는 서로소)

$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$

$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

$\therefore\ G = x + 2$

11. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면?
(단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 3 ③ 5 ④ −3 ⑤ −5

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은
$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$
$\omega^2+\omega+1=0,$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$
$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$
$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$
$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$
$\dfrac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\dfrac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$
$=\dfrac{2\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$
$=-2+\dfrac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$
$=-2-\dfrac{3}{1}=-5$

12. 장미꽃을 포장하는데 3송이 씩 묶으면 2송이가 남고, 5송이 씩 묶으면 3송이 씩 묶을 때보다 3 묶음 줄어든다. 장미꽃은 몇 송이인지 구하여라.(정답 2개)

▶ 답： 송이

▶ 답： 송이

▷ 정답： 23 송이

▷ 정답： 26 송이

해설

장미꽃의 묶음의 수를 x묶음이라 하면
장미꽃은 $(3x+2)$ 송이이다.
$5(x-3) \le 3x+2 \le 5(x-3)+4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(x-3) \le 3x+2 \\ 3x+2 \le 5(x-3)+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \le 17 \\ -2x \le -13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{17}{2} \\ x \ge \frac{13}{2} \end{cases}$$

$\therefore\ \frac{13}{2} \le x \le \frac{17}{2}$

따라서 $x = 7, 8$ 이므로 $3 \times 7 + 2 = 23$ (송이) 또는 $3 \times 8 + 2 = 26$ (송이) 이다.

13. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$를 만족할 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 8　② 16　③ 24　④ 36　⑤ 42

해설

공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에 주어진 수를 대입하여

$(ab+bc+ca)$의 값을 구하면 $(ab+bc+ca)=12$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c=2$이므로 $a^3+b^3+c^3=24$

14. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2+xy-2y^2=0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x>0,\ y>0$ 에서 $2x^2+xy-2y^2=0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2+(\frac{x}{y})-2=0$

$\frac{x}{y}=t$라 하면 $(t>0)$

$2t^2+t-2=0$

근의 공식에 대입하면

$t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

$\therefore t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\ (t>0)\ \frac{x}{y}=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

15. $x^2 + 3ax + b = 0$과 $x^2 - ax + c = 0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1 + 3a + b = 0 \cdots$ ㉠

$1 - a + c = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a + b - c = 0$

$\therefore\ b - c = -4a$

$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$

따라서 $a = 1$일 때, 최소이다.

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4\left(m^2-1\right)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4\left(m^2-1\right)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

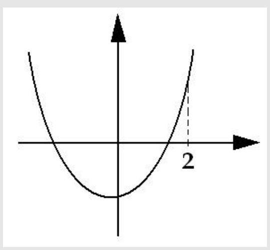
따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.

17. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



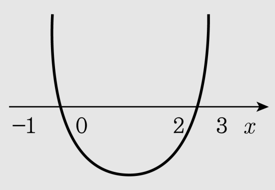
문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.
대칭축 조건에서 $k < 2$ ······㉠
$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ······㉡
㉠, ㉡에서 $k \leq 1$
k의 최댓값은 1이다.

18. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<3$이 성립하도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a>0$)

① $\frac{2}{3}<a<1$　② $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$　③ $\frac{3}{2}<a<2$
④ $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}<a<3$

해설

$f(0)=-1<0$ 이므로 $y=ax^2-(a+1)x-1$의
그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)=a+(a+1)-1>0$에서 $a>0$ ⋯ ㉠

$f(2)=4a-2(a+1)-1<0$에서 $a<\frac{3}{2}$ ⋯ ㉡

$f(3)=9a-3(a+1)-1>0$에서 $a>\frac{2}{3}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$

19. x에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
위의 식에 $x=2$를 대입하면, $2^n(4+2a+b)=0$
$\therefore\ b=-2a-4(2^n\neq 0)\cdots$①
①을 준식에 대입하면,
$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$
위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.
$x^n(x+a+2)=(x-2)p(x)+2^n$
다시 $x=2$를 대입하면,
$2^n(4+a)=2^n \quad \therefore\ a=-3$
$a=-3$을 ①에 대입하면,
$b=(-2)(-3)-4=2$
$\therefore\ a=-3,\ b=2$
$\therefore\ a+b=-1$

20. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m + 5 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2 = X$로 놓으면
$X^2 + (m+2)X + m + 5 = 0 \cdots\cdots$ ①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,
준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로
①의 두 근을 α, β라 할 때,
$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$, $\alpha+\beta = -(m+2) > 0$, $\alpha\beta = m+5 > 0$
이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는
$-5 < m < -4$

21. $-1 \leq \frac{p}{2} \leq 0$, $p + 2q \leq 2$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q \ (0 \leq x \leq 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \leq \frac{p}{2} \leq 0$ 에서 $0 \leq -\frac{p}{2} \leq 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\frac{p}{2}$ 일 때이다.

$\therefore \ m = q - \frac{p^2}{4}$

또한 $p + 2q \leq 2$ 에서 $q \leq -\frac{p}{2} + 1$

$\therefore \ m \leq -\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} + 1 = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{5}{4}$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

22. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+cx^2+dx+1=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, $c+d$의 값을 구하면?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$\alpha = a+bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$)라 놓으면 $\alpha^2 = a^2-b^2+2abi = a-bi$ ($\because$ 계수가 실수이므로 $\alpha^2 = \overline{\alpha}$)

$\therefore\ a^2-b^2 = a,\ 2ab = -b$ 에서 $a = -\frac{1}{2},\ b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 두 허근 $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$를 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

x^3의 계수, 상수항을 비교하면 한 실근은 -1

$x^3+cx^2+dx+1 = (x^2+x+1)(x+1) = x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore\ c=2,\ d=2$

$\therefore\ c+d=4$