1. x^3+ax^2+bx-4는 $x-2$로 나누어 떨어지고 $x+1$로 나누면 나머지가 6이다. $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$라 하면

$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3$, $b = -8$

$\therefore\ a - b = 11$

2. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를

$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면

$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$

$3+(a-6)i = (b-2)-ai$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3 = b-2$, $a-6 = -a$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$b = 5,\ a = 3$

$\therefore\ a+b = 8$

3. 다음 <보기>에서 계산 중 <u>잘못</u>된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ
② Ⅰ, Ⅲ
③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ
⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$

∴ 옳다.

4. 연립부등식 $\begin{cases} 3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \\ 2(3-2x) < -x+10 \end{cases}$ 을 만족하는 양의 정수 x 의 개수는?

① 1 개　② 3 개　③ 5 개　④ 6 개　⑤ 7 개

해설

i) $3(x-1) \geq 2+4(2x-5) \Rightarrow x \leq 3$

ii) $2(3-2x) < -x+10 \Rightarrow x > -\dfrac{4}{3}$

연립부등식의 해는 $-\dfrac{4}{3} < x \leq 3$ 이므로, 이를 만족하는 양의 정수 x 의 개수는 1, 2, 3 의 3 개이다.

5. 연립부등식 $4x - 3 < -6(1 - x) < 7x - 2$ 의 해 중 가장 작은 정수를 구하면?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

해설

$$\begin{cases} 4x - 3 < -6(1 - x) \\ -6(1 - x) < 7x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x > -4 \end{cases}$$

연립부등식의 해가 $x > \dfrac{3}{2}$ 이므로 가장 작은 정수는 2이다.

6. $f(x)$가 x의 다항식일 때 $(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$가 x에 대한 항등식이 될 때 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2-2)(x^4+1)f(x)=x^8+ax^4+b$에서
$x^2=2$를 대입하면 $0=16+4a+b \cdots$ ①
$x^4=-1$을 대입하면 $0=1-a+b \cdots$ ②
①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-4$
$\therefore\ a+b=-7$

7. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하면? $\left(\text{단, } x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정)라 놓으면

$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x+(3a-2k)=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-4k=0$, $3a-2k=0$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

8. 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 x^2-x-12로 나눈 나머지가 $14x-9$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$라 하면

x^3+ax^2+bx+3

$=(x^2-x-12)Q(x)+14x-9$

$=(x-4)(x+3)Q(x)+14x-9$

$x=4,\ x=-3$을 각각 대입하면

$16a+4b+67=47\cdots$ ㉠

$9a-3b-24=-51\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=3$

$\therefore\ a+b=1$

9. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=x^2+ax-9=Gp$

$B=x^2+bx+c=Gq$라 하면

$A+B=(p+q)G=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$

$L=pqG=x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G=x-3$, $p=x+3$, $q=x-1$이다.

$\therefore\ A=(x+3)(x-3)=x^2-9$

$\quad B=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ a=0,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=7$

10. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax+b$이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A=Ga, B=Gb(a,b$는 서로소$)$

$A+B=(a+b)G=2(x+2)(x-2)$

$L=abG=(x-1)(x-3)(x+2)$

$\therefore\ G=x+2$

11. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면? (단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 3 ③ 5 ④ -3 ⑤ -5

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은

$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\omega^2+\omega+1=0,$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$

$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$

$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$

$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$

$$\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$$

$$=\frac{2\omega^2}{-\omega^2}+\frac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$$

$$=-2+\frac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$$

$$=-2-\frac{3}{1}=-5$$

12. 장미꽃을 포장하는데 3송이 씩 묶으면 2송이가 남고, 5송이 씩 묶으면 3송이 씩 묶을 때보다 3 묶음 줄어든다. 장미꽃은 몇 송이 인지 구하여라.(정답 2개)

▶ 답 : ______ 송이

▶ 답 : ______ 송이

▷ 정답 : 23 송이

▷ 정답 : 26 송이

해설

장미꽃의 묶음의 수를 x묶음이라 하면
장미꽃은 $(3x+2)$ 송이 이다.
$5(x-3) \le 3x+2 \le 5(x-3)+4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(x-3) \le 3x+2 \\ 3x+2 \le 5(x-3)+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \le 17 \\ -2x \le -13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le \frac{17}{2} \\ x \ge \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{13}{2} \le x \le \frac{17}{2}$$

따라서 $x=7, 8$ 이므로 $3\times7+2=23$ (송이) 또는 $3\times8+2=26$ (송이) 이다.

13. 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$ 를 만족할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 에 주어진 수를 대입하여

$(ab+bc+ca)$ 의 값을 구하면 $(ab+bc+ca)=12$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ 이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c=2$ 이므로 $a^3+b^3+c^3=24$

14. 두 양의 실수 x, y 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$을 만족할 때, $\frac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ② $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ③ $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0,\ y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y}) - 2 = 0$

$\frac{x}{y} = t$라 하면 $(t > 0)$

$2t^2 + t - 2 = 0$

근의 공식에 대입하면

$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\therefore t = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$ $(t > 0)$ $\frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

15. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0 \quad \cdots ㉠$

$1-a+c=0 \quad \cdots ㉡$

㉠ − ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+m^2-1=0$이 정수근을 가질 때, 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2+mx+x^2-1=0$에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-m\pm\sqrt[2]{m^2-4\left(m^2-1\right)}}{2}$$

이 때, x가 정수이므로

$\sqrt{m^2-4\left(m^2-1\right)}=k$(단, k는 정수는 $k\geq 0$)라 하면

$-3m^2+4=k^2$

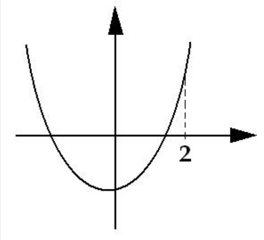
따라서, m의 개수는 $-1,\ 0,\ 1$로 3개다.

17. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

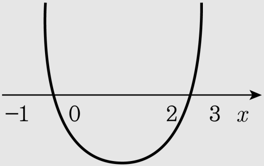
k의 최댓값은 1이다.

18. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<3$이 성립하도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a>0$)

① $\frac{2}{3}<a<1$　② $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$　③ $\frac{3}{2}<a<2$
④ $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}<a<3$

해설

$f(0)=-1<0$ 이므로 $y=ax^2-(a+1)x-1$의
그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)=a+(a+1)-1>0$에서
$a>0\ \cdots$ ㉠

$f(2)=4a-2(a+1)-1<0$에서 $a<\frac{3}{2}\cdots$ ㉡

$f(3)=9a-3(a+1)-1>0$에서 $a>\frac{2}{3}\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$

19. x에 관한 항등식 $x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$가 성립할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 5

해설

$x^n(x^2+ax+b)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면, $2^n(4+2a+b)=0$

$\therefore\ b=-2a-4(2^n\neq 0)\cdots$①

①을 준식에 대입하면,

$x^n(x^2+ax-2a-4)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

$x^n(x-2)(x+a+2)=(x-2)^2p(x)+2^n(x-2)$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$x^n(x+a+2)=(x-2)p(x)+2^n$

다시 $x=2$를 대입하면,

$2^n(4+a)=2^n\quad\therefore\ a=-3$

$a=-3$을 ①에 대입하면,

$b=(-2)(-3)-4=2$

$\therefore\ a=-3,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-1$

20. 4차방정식 $x^4+(m+2)x^2+m+5=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2=X$로 놓으면

$X^2+(m+2)X+m+5=0 \cdots\cdots$ ①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,

준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로

①의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$D=(m+2)^2-4(m+5)>0,\ \alpha+\beta=-(m+2)>0,\ \alpha\beta=m+5>0$

이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는

$-5<m<-4$

21. $-1 \le \frac{p}{2} \le 0,\ p+2q \le 2$ 를 만족하는 실수 $p,\ q$ 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q\ (0 \le x \le 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \le \frac{p}{2} \le 0$ 에서 $0 \le -\frac{p}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\frac{p}{2}$ 일 때이다.

$\therefore\ m = q - \frac{p^2}{4}$

또한 $p + 2q \le 2$ 에서 $q \le -\frac{p}{2} + 1$

$\therefore\ m \le -\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} + 1 = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{5}{4}$

따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

22. 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+cx^2+dx+1=0$이 한 실근과 두 허근 α, α^2을 가질 때, $c+d$의 값을 구하면?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$\alpha = a+bi$ (a, b는 실수, $b \neq 0$) 라 놓으면 $\alpha^2 = a^2-b^2+2abi = a-bi$ ($\because$ 계수가 실수이므로 $\alpha^2 = \overline{\alpha}$)

$\therefore\ a^2-b^2=a,\ 2ab=-b$ 에서 $a=-\frac{1}{2},\ b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ 두 허근 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$를 근으로 하는 이차방정식은$x^2+x+1=0$

x^3의 계수, 상수항을 비교하면 한 실근은 -1

$x^3+cx^2+dx+1=(x^2+x+1)(x+1)=x^3+2x^2+2x+1$

$\therefore\ c=2,\ d=2$

$\therefore\ c+d=4$