1. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \to (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$ 은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x = 1$ 이 유일
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$
$\to (x+1)^2 + 1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x = 1$

2. 두 점 $A(1,\ -3)$, $B(3,\ 7)$에 대하여 $\overline{AB}$를 $2\ :\ 3$으로 내분하는 점 $P(a,\ b)$와 $2:\ 3$으로 외분하는 점 $Q(c,\ d)$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

① $-\frac{134}{5}$　② $-\frac{116}{5}$　③ $\frac{134}{5}$　④ $\frac{116}{5}$　⑤ 20

해설

$$P\ (a,\ b)=\left(\frac{2\times3+3\times1}{2+3},\ \frac{2\times7+3\times(-3)}{2+3}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{5},\ 1\right)$$

$$Q\ (c,\ d)=\left(\frac{2\times3-3\times1}{2-3},\ \frac{2\times7-3\times(-3)}{2-3}\right)$$

$$=(-3,\ -23)$$

$$\therefore\ a+b+c+d=\frac{9}{5}+1-3-23=-\frac{116}{5}$$

3. 일차함수 $y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ −6 ⑤ −3

해설

$y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a - 2 = \tan 45° = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
$b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
$\therefore\ a + b = 6$

4. 점 (3, 2) 를 지나고 직선 $-2x+y+5=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $x-y-1=0$
② $2x-y-3=0$
③ $2x-y-4=0$
④ $2x-5y+4=0$
⑤ $-2x+y-4=0$

해설
직선 $-2x+y+5=0$
즉 $y=2x-5$ 와 평행한 직선의 기울기는 2 이다.
이 때, 점 (3, 2) 를 지나므로
구하는 직선의 방정식은
$y-2=2(x-3)$, $\quad\therefore\ y=2x-4$
$\therefore\ 2x-y-4=0$

5. 중심이 $(1, 3)$ 이고, x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

x 축에 접하는 원의 반지름은 y 좌표의 절댓값과 같으므로,
$(x-1)^2+(y-3)^2=9$

6. 두 원 $(x+1)^2+y^2=1$, $x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 의 공통접선의 개수는?

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(x+1)^2+y^2=1$ 에서 이 원의 중심을 C_1 이라
하면 점 C_1 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고
반지름의 길이는 1 이다.
$x^2+y^2-6x-6y+2=0$ 에서
$(x-3)^2+(y-3)^2=16$ 이므로
이 원의 중심을 C_2 이라 하면
점 C_2 의 좌표는 $(3,\ 3)$ 이고
반지름의 길이는 4 이다.
$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=5$ 이고
두 원의 반지름의 길이는 1, 4 이므로
두 원은 서로 외접하게 된다.
따라서 공통접선은 3 개이다.

7. 평행이동 f : $(x,\ y) \to (x+1,\ y-2)$에 의하여 점$(3,\ 3)$은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① $(0,\ 0)$　② $(3,\ 3)$　③ $(1,-2)$
④ $(-1,\ 2)$　⑤ $(2,\ 5)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+1$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 변환이므로 $(a+1,\ b-2)=(3,\ 3)$ 따라서 $a=2,\ b=5$

8. 원 $x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=1$
② $(x-2)^2+(y+1)^2=1$
③ $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
④ $x^2+(y+2)^2=1$
⑤ $(x-2)^2+y^2=1$

해설

$x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 에서
$(x-2)^2+(y-1)^2=1$ ······㉠
㉠을 y 축에 대하여 대칭이동하면
$(x+2)^2+(y-1)^2=1$ ······㉡
㉡을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$x^2+(y-1)^2=1$ ······㉢
㉢을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면
$x^2+(y+2)^2=1$

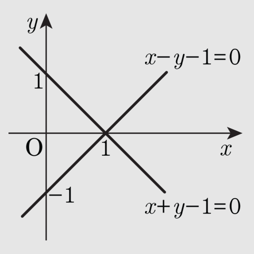
9. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

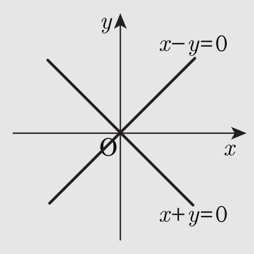
① 무한히 많다. ② 0 개 ③ 1 개

④ 2 개 ⑤ 4 개

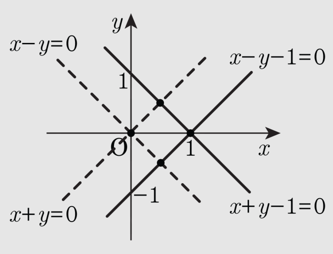
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2 개이다.

10. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 x값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $2\sqrt{2}$　　② $-\sqrt{3}$　　③ $\sqrt{5}$

④ $-2\sqrt{2}$　　⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = (x-2y)(x+y) = 0$

㉠ $x = 2y$일 때

$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$

$y^2 = 2,$

$y = \pm\sqrt{2}$

$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2} \end{cases}$

㉡ $x = -y$일 때

$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10,$

$y^2 = 5,$

$y = \pm\sqrt{5}$

$\begin{cases} x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5} \\ x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5} \end{cases}$

11. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0 \ , \ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로
$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0 \cdots$ ㉠
$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0 \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0 \ \therefore \ \alpha=1$
$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$
$\therefore \ m=1$
$\therefore \ m+\alpha=2$

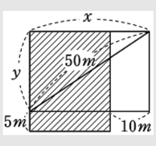
12. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5) = xy + 50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x - 10y = 100$

$\therefore\ x = 2y + 20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2 + y^2 = 50^2$

$y^2 + 16y - 420 = 0$

$(y-14)(y+30) = 0$

$\therefore\ y = 14,\ -30$

그런데 $0 < y < 50$ 이므로 $y = 14$

이것을 ㉢에 대입하면 $x = 48$

13. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

$x,\ y$는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

14. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

15. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y가 양의 정수이므로

$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

16. 부등식 $2|x+2|+|x-2|<6$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 2개

해설

i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-2)<6,\ x>-\frac{8}{3}$

공통부분은 $-\frac{8}{3}<x<-2$

ii) $-2\le x<2$일 때

$2(x+2)-(x-2)<6,\ x<0$

공통부분은 $-2\le x<0$

iii) $x\ge 2$일 때

$2(x+2)+(x-2)<6,\ x<\frac{4}{3}$

공통부분은 없음

i), ii), iii)을 모두 합하면 $-\frac{8}{3}<x<0$

정수 x : $-2,\ -1$ (2개)

17. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 이차부등식$cx^2-bx+a>0$의 해는?(단,$\alpha>0$이다.)

① $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$
② $-\beta<x<-\alpha$
③ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$
④ $x>\frac{1}{\alpha},\ x<\frac{1}{\beta}$
⑤ $x>-\frac{1}{\beta},\ x<-\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$a<0,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$cx^2-bx+a>0$

에서 $a<0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$

$\therefore \alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\therefore (\alpha x+1)(\beta x+1)<0$이고

$0<\alpha<\beta$에서 $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$이므로

$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

18. 점 A(4, 0)과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ π

해설

$x^2+y^2=4$ 위의 점을 $P(a,b)$ 라 하면
$A(4,0), P(a,b)$ 의 중점의 좌표 $M(x,y)$는
$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.
$\therefore\ x=\frac{a+4}{2},\ \ y=\frac{b}{2}$
$\therefore\ \ a=2x-4,\ b=2y$
이 때, 점 P는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2=4$가 성립한다.
$(2x-4)^2+(2y)^2=4, (x-2)^2+y^2=1$
따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2,0)$,
반지름의 길이가 1인 원이므로
원이 넓이 S 는 $S=\pi\cdot 1^2=\pi$

19. 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ 를 원 $(x+1)^2+(y-5)^2=5$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 직선 $x+3y+2=0$ 은 직선 $x+ay+b=0$ 으로 옮겨진다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=2$

해설

원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동과 일치하므로
주어진 두 원의 중심의 좌표를 구하면
$(x-2)^2+(y-3)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(2,3)$
$(x+1)^2+(y-5)^2=5 \rightarrow$ 원의 중심 :$(-1,5)$
점 $(-1,\ 5)$ 는 점 $(2,3)$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 직선 $x+3y+2=0$ 을 x 축의 방향으로
-3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x+3)+3(y-2)+2=0$
$\therefore\ x+3y-1=0 \cdots$ ㉠
㉠ 이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로
$a=3$, $b=-1$ $\therefore a+b=2$

20. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l, l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m, m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼 평행이동시킨 직선 l 은
l : $y = 2(x - \alpha) + 4$
이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은
m : $(-y) = 2(x - \alpha) + 4$
n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로
n : $(-y) = 2(-x - \alpha) + 4$
이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로
l 과 n이 일치하려면
$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4$ 가 되어 $\alpha = 2$ 이다.

21. 연립부등식 $\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \\ |x| < a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 양수 a 의 값의 범위를 구하여라.

① $3 < a \le 4$　　② $0 < a \le 3$　　③ $0 < a < 3$

④ $0 < a \le 4$　　⑤ $0 < a < 4$

해설

$\begin{cases} 6 < -x+2 < -2x-1 \cdots ㉠ \\ |x| < a \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $6 < -x+2$ 의 해는 $x < -4$

$-x+2 < -2x-1$ 의 해는 $x < -3$

$\therefore x < -4$

㉡에서 $|x| < a$는 $-a < x < a$ 두 연립부등식의 해가 없으려면

$-a \ge -4$, $a \le 4$,

그런데 a는 양수이므로 a의 값의 범위는 $0 < a \le 4$ 이다.

22. 어떤 상점에서 스캐너를 한 개에 10만원씩 판매할 때 한 달에 100개가 팔리고, 한 개의 가격을 x만원 인상하면 월 판매량이 $4x$개 줄어드는 것으로 조사되었다. 한 달의 총 판매액이 1200만원 이상이 되도록 하려면 한 개의 가격을 얼마로 하면 좋을까?

① 15만원 이상 20만원 이하 ② 10만원 이상 15만원 이하
③ 5만원 이상 10만원 이하 ④ 4만원 이상 8만원 이하
⑤ 2만원 이상 4만원 이하

해설

$(10+x)(100-4x) \geq 1200,\ 4x^2-60x+200 \leq 0$
$x^2-15x+50=(x-5)(x-10) \leq 0$
$\therefore 5 \leq x \leq 10$
10만원씩 판매할 때보다 5만 원 이상 10만 원 이하 인상해야 하므로 한 개의 가격을 15만 원 이상 20만 원 이하가 되도록 하면 된다.

23. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$　　ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

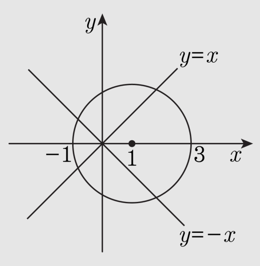
ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

24. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해의 개수를 구하면?

① 없다. ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\therefore\ x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$



$\therefore\ (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

즉, 해는 4 개이다.

25. $x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면 직선 $y=mx$에 접한다고 한다. 이 때, 상수 m 의 값들의 합을 구하면?

① $-\frac{12}{5}$　② $-\frac{7}{5}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$x^2+y^2-6x-4y+9=0$을 y축에 대하여 대칭이동시키면
$(-x)^2+y^2-6(-x)-4y+9=0$, $x^2+y^2+6x-4y+9=0$
$\therefore\ (x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \cdots\cdots$ ㉠
이때, ㉠이 직선 $mx-y=0$에 접하므로 이 직선과 $(-3,2)$ 사이의 거리는 2이어야 한다.
즉, $\frac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$
$9m^2+12m+4=4m^2+4$
$\therefore\ 5m^2+12m=0$
따라서, $m=0$ 또는 $m=-\frac{12}{5}$ 이므로 그 합은 $0+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{12}{5}$