

1. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 = 0 \text{을 변형하면} \\x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0, \\(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0 \\(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0, \\x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0 \\ \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

2. 어떤 정육면체의 밑면의 가로 길이 1 cm 줄이고, 세로 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답: cm

▷ 정답: 2cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm 라 하면

$$\text{조건으로부터 } (x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3,$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3,$$

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0 \text{ 을 풀면 } x = 2(\text{cm})$$

3. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x 값의 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ -10 ⑤ -15

해설

$$9x^2 - y^2 = 0 \text{ 에 } 3x^2 + y = 6 \text{ 대입.}$$

$$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm 1, \pm 2$$

$$x \text{ 의 합 : } +1 - 1 + 2 - 2 = 0$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 && \dots \textcircled{1} \\ 4x^2 - 9xy + y^2 &= -14 && \dots \textcircled{2} \\ \textcircled{2} \text{ 식} + 2 \times \textcircled{1} \text{ 식에 대입하면} \\ 6x^2 - 11xy + 3y^2 &= 0 && (3x - y)(2x - 3y) = 0 \\ \therefore 3x &= y \text{ or } 2x = 3y \\ \textcircled{1}: 3x = y \text{를 } \textcircled{1} \text{식에 대입하면} \\ 7x^2 = 7x &= 1(x > 0), \quad y = 3 \\ \therefore x + y &= 4 \\ \textcircled{2}: 2x = 3y \text{를 } \textcircled{2} \text{식에 대입하면} \\ 7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2(y > 0), \quad x = 3 \\ \therefore x + y &= 5 \\ a > b \text{이므로 } a = 5, b = 4 \\ \therefore a - b &= 1 \end{aligned}$$

5. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b, b > c$ 이면 $a > c$

② $a > b$ 이면 $a + c > b + c, a - c > b - c$

③ $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

④ $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

⑤ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

해설

⑤ 반례 $a = 2, b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{2}, \frac{1}{b} = 1$

$\therefore \frac{1}{2} < 1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 4 < 14 \\ 2x + 5 > -1 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$$\begin{cases} 3x - 4 < 14 \\ 2x + 5 > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x < 18 \\ 2x > -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > -3 \end{cases}$$

$$\therefore -3 < x < 6$$

$$\therefore x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

7. $3x - 5 \leq 10$, $x + 2 > a$ 의 정수해가 1개가 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $4 \leq a < 5$ ② $5 \leq a < 6$ ③ $6 \leq a < 7$

④ $7 \leq a < 8$ ⑤ $8 \leq a < 9$

해설

$$A : 3x \leq 15 \rightarrow x \leq 5$$

$$B : x > a - 2$$

$a - 2 < x \leq 5$ 에 속하는 정수가 1개여야 하므로

$$4 \leq a - 2 < 5$$

$$\therefore 6 \leq a < 7$$

8. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a < m < b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

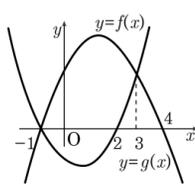
▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$$\begin{aligned}(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3 &> 2 \\(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 1 &> 0 \text{ 이므로} \\m \neq -1, m > -1 \text{ 이고, } D < 0 \text{ 이다.} \\ \frac{D}{4} = m^2 - 3m < 0 &\quad \therefore 0 < m < 3 \\ \therefore a = 0, b = 3 \\ \therefore a + b = 3\end{aligned}$$

9. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해를 구하면?



- ① $x \leq -1$ ② $-1 \leq x \leq 2$
 ③ $-1 \leq x \leq 3$ ④ $2 \leq x \leq 3$
 ⑤ $2 \leq x \leq 4$

해설

$f(x) - g(x) \leq 0$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \leq x \leq 3$

10. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2 - 6x \geq a^2 - 6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

- ① $-4 \leq a \leq 0$ ② $-2 \leq a \leq 2$ ③ $0 \leq a \leq 4$
④ $2 \leq a \leq 4$ ⑤ $4 \leq a \leq 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서
 $f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
 $f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
 $f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \geq 0$
 $a^2 - 6a + 8 \leq 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq a \leq 4$

11. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t+1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

12. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① $-i$

② i

③ $-2i$

④ $3i$

⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
 따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
 한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
 우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
 따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 \therefore 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
 네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
 즉 $i \times (\text{나머지 세 근의 곱}) = 1$
 \therefore 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$

13. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$a = bc, b = ca, c = ab,$$

$$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$$

$$abc \neq 0, abc = 1,$$

$$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$$

$$a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1$$

그러나 $abc = 1$ 이므로, a, b, c 중에서 -1 인 것은 없거나 2

개이다.

$$\therefore (a, b, c) = (1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$$

14. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

16. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1 < 2x+y < 1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이]
 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=(㉠)$ 이 된다.
 $-1 < 2x+y < 1$ 를 풀 때 y 대신 $y=(㉠)$ 를 대입하면 $-1 < -x-1 < 1$ 이 된다.
부등식을 풀면 $-2 < x < 0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
 x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=(㉢)$ 가 된다.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠ $-3x-1$

▷ 정답: ㉡ -1

▷ 정답: ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$$2(x+2y)+1=-x+3y$$

$$2x+4y+1=-x+3y$$

$$4y-3y=-x-2x-1$$

$$y=-3x-1$$

$-1 < 2x+y < 1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면

$$-1 < 2x+(-3x-1) < 1$$

$$-1 < -x-1 < 1$$

$$0 < -x < 2$$

$$-2 < x < 0$$

정수인 x 는 -1 이 된다.

x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

17. 두 부등식 $0.7 - x \leq -2 - 0.1x$, $\frac{2+x}{3} \geq x+a$ 의 공통 부분이 없을 때, a 의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$$0.7 - x \leq -2 - 0.1x \Rightarrow 7 - 10x \leq -20 - x - 9x \leq -27, x \geq 3$$

$$\frac{2+x}{3} \geq x+a \Rightarrow 2+x \geq 3x+3a-2x \geq 3a-2, x \leq 1 - \frac{3}{2}a$$

공통 부분이 없으므로 $1 - \frac{3}{2}a < 3$,

$$-\frac{3}{2}a < 2$$

$$\therefore a > -\frac{4}{3}$$

따라서 가장 작은 정수 a 의 값은 -1이다.

18. 15%의 설탕물 300g이 있다. 여기에서 200g의 설탕물을 버리고 물 x g을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x 가 될 수 없는 것은?

- ① 25 ② 32 ③ 39 ④ 47 ⑤ 52

해설

설탕물을 200g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.

따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15%의 설탕물 100g이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15$ (g)이다.

여기에 물 x g을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12$ 이다.

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \\ \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \leq x \leq 50$ 이다.

19. 부등식 $(x-2)(ax-1) < 0$ 의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a 가 있다.
- ② $a = 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.
- ③ $a < 0$ 이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.
- ④ $a > 0$ 이면 이 부등식의 해는 $x < 2$ 이다.
- ⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

- ① $a \neq 0$ 일 때
 $(x-2)(ax-1) = a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$ 이므로
 $a = \frac{1}{2}$ 이면 이 부등식의 해는 없다.
- ② $a = 0$ 이면 이 부등식은 $-(x-2) < 0$,
즉 $x-2 > 0$ 이므로 해는 $x > 2$ 이다.
- ③ $a < 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) > 0$ 이므로
 $x < \frac{1}{a}$ 또는 $x > 2$ 이다.
- ④ $a > 0$ 이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$ 이므로
 $a < \frac{1}{2}$ 일때, $2 < x < \frac{1}{a}$,
 $a > \frac{1}{2}$ 일때 $\frac{1}{a} < x < 2$ 이다.

20. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

- ① -1 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 1

해설

$$|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\therefore a < 0, a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

$$a = -1 \text{ 일 때 } \textcircled{1} \text{ 은 } x^2 - 1 < 0, \textcircled{2} \text{ 는 } -x^2 + b > 0$$

$$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$$

21. 두 이차방정식 $x^2 + 2ax + a + 2 = 0, x^2 + (a-1)x + a^2 = 0$ 중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $a < \frac{1}{2}, 2 < a$ ② $a \leq 1, 3 \leq a$ ③ $a \leq \frac{1}{2}, 3 < a$
④ $a \leq \frac{1}{2}, 2 < a$ ⑤ $a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (a+2) \geq 0 \text{에서}$$

$$(a-2)(a+1) \geq 0, a \leq -1, a \geq 2 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{또, } D_2 = (a-1)^2 - 4a^2 \geq 0 \text{에서}$$

$$(3a-1)(a+1) \leq 0, -1 \leq a \leq \frac{1}{3} \dots \textcircled{2}$$

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a 의 범위는 ① 또는 ②이므로

$$a \leq \frac{1}{3}, a \geq 2$$

22. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx + 1) > -(x-2)^2 + 1 \dots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
 $x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉠식이 항상 성립하기 위하여
 $\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
 $\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3은 k 의 값의 범위에 속하나
-1은 속하지 않는다.

23. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 $-2, 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $\frac{2}{3} < a \leq 2$ ② $-2 < a < 4$ ③ $-4 \leq a \leq 2$
④ $\frac{2}{3} < a \leq 4$ ⑤ $a \geq 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1
사이에 있으므로

(i) $D = a^2 - 4(2a - 3) \geq 0$ 에서
 $a^2 - 8a + 12 \geq 0, (a - 2)(a - 6) \geq 0$
 $\therefore a \leq 2$ 또는 $a \geq 6$

(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$ 에서
 $1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$ 에서

$3a > 2 \therefore a > \frac{2}{3}$

(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의

방정식이 $x = -\frac{a}{2}$ 이므로

$-2 < -\frac{a}{2} < 1$

$\therefore -2 < a < 4$

따라서 a 의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \leq 2$

24. $|p| < 2$ 를 만족하는 모든 실수 p 에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$ 가 성립하도록 하는 x 의 값의 범위는?

- ① $x \leq -3, x = -1, x \geq 1$ ② $x \leq -1, x = 1, x \geq 3$
 ③ $x \leq -3, x \geq 1$ ④ $x \leq -1, x \geq 3$
 ⑤ $-3 \leq x \leq -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p, (x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
 $f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$ 이라 하면, $f(p) > 0$ 이다.
 $-2 < p < 2$ 에서 $f(p) > 0$ 이기 위한 조건은 $f(-2) \geq 0$ 이고
 $f(2) \geq 0$ 이어야 한다.
 $f(-2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \geq 0$
 $\therefore (x-1)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq 1, x \geq 3 \dots\dots \textcircled{\ominus}$
 $f(2) \geq 0$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$
 $\therefore (x+1)(x-1) \geq 0$
 $\therefore x \leq -1, x \geq 1 \dots\dots \textcircled{\omin�}$
 $\textcircled{\omin�}, \textcircled{\omin�}$ 에서 $\therefore x \leq -1, x = 1, x \geq 3$
 그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로
 주어진 조건을 만족하지 않는다.
 따라서 구하는 x 값의 범위는 $x \leq -1, x \geq 3$

25. 삼차방정식 $x^3 + px + 2 = 0$ 의 세 근이 모두 정수일 때, p 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -3 ③ -2 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 근을 α, β, γ 라고 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{ⓐ}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p \quad \text{ⓑ}$$

$$\alpha\beta\gamma = -2 \quad \text{ⓒ}$$

ⓒ에서

$$-2 = (-1) \times 1 \times 2 = 1 \times 1 \times (-2) = (-1)(-1)(-2)$$

ⓐ에서 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이어야 하므로

$$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$$

$$\text{ⓑ에서 } p = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1 = -3$$

26. 한 근이 $1 + \sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 과 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a - b + c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -9

해설

$1 + \sqrt{3}i$ 가 근이므로 $1 - \sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$$(1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{3}i)\alpha + (1 - \sqrt{3}i)\alpha = b \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)\alpha = -c \cdots \cdots \text{㉢}$$

또, 방정식 $x^2 + ax + 2 = 0$ 과의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + a\alpha + 2 = 0 \cdots \cdots \text{㉣}$$

㉠에서 $\alpha = -a - 2$ 를 ㉣에 대입하면

$$(-a - 2)^2 + a(-a - 2) + 2 = 0$$

$$\therefore a = -3, \alpha = 1$$

$$\text{㉡에서 } b = 2\alpha + 4 = 6$$

$$\text{㉢에서 } c = -4\alpha = -4$$

$$\therefore a - b + c = -3 - 6 - 4 = -13$$

27. 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 α 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

② $\alpha^4 = 1$

③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1 = 1$

④ α 는 실수가 아니다.

⑤ α^3 은 방정식 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이다.

해설

① α 가 방정식

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근이므로,

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

② $\alpha^4 - 1$

$$= (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \text{이므로}$$

$$\alpha^4 = 1$$

③ $\alpha^{100} + \alpha^{50} + \alpha^{25} + \alpha^{15} + 1$

$$= (\alpha^4)^{25} + (\alpha^4)^{12} \cdot \alpha^2 + (\alpha^4)^6 \cdot \alpha + (\alpha^4)^3 \cdot \alpha^3 + 1$$

$$= 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + 1 = 1$$

④ $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1) = 0$ 에서

$x = -1$ 이라는 실근이 존재하므로

α 는 실수일 수 있다.

⑤ $x = \alpha^3$ 을 방정식

$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 에 대입하면,

$$\alpha^9 + \alpha^6 + \alpha^3 + 1$$

$$= (\alpha^4)^2 \cdot \alpha + \alpha^4 \cdot \alpha^2 + \alpha^3 + 1$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + 1 = 0$$

$$(\because \alpha^4 = 1)$$

28. 두 개의 이차방정식 $x^2 + ax + \frac{1}{a} = 0$ 과 $x^2 + bx + \frac{1}{b} = 0$ 이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ a, b 의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α 라 하고 두 식에 대입하면

$$\alpha^2 + a\alpha + \frac{1}{a} = 0 \dots\dots ①$$

$$\alpha^2 + b\alpha + \frac{1}{b} = 0 \dots\dots ②$$

① - ②하면

$$\therefore \alpha(a-b) + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0, (a-b)\left(\alpha - \frac{1}{ab}\right) = 0$$

$$a \neq b \text{이므로 } \alpha = \frac{1}{ab}$$

$$\text{이것을 ①에 대입하면 } \left(\frac{1}{ab}\right)^2 + a \cdot \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} = 0$$

$$1 + a^2b + ab^2 = 1 + ab(a+b) = 0$$

$$\therefore ab(a+b) = -1$$

29. A, B, C, D 네 명이 서로 네 번씩 바둑을 두어 각 대국의 결과마다 승자에게 2점, 패자에게 0점, 무승부일 때는 두 명 모두에게 1점씩을 준다. 대국의 결과가 다음 표와 같을 때, D가 얻은 점수를 구하면?

	승	무	패	점수
A	6	1	5	13
B	5	3	4	13
C	8	2	2	18
D	?	?	?	x

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

D가 a 승 b 무 c 패를 했다고 하면
 $a + b + c = 4 \cdot 3 = 12$ ㉠
네 명이 모두 승수와 패수가 같아야 하므로
 $6 + 5 + 8 + a = 5 + 4 + 2 + c$
 $\therefore c = a + 8$ ㉡
또, 무승부의 합은 항상 짝수이므로 b 는 짝수이어야 한다.
㉠, ㉡에서 $2a + b = 4$ 이고
 $b = 0$ 일 때 $a = 2$, $b = 2$ 일 때 $a = 1$,
 $b = 4$ 일 때 $a = 0$ 이므로
어느 경우에도 D가 얻은 점수는 4점이다.

30. a, b, c, d 는 정수이고, $a < 2b, b < 3c, c < 4d, d < 100$ 을 만족시킬 때, a 의 최댓값은?

- ① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a 의 최댓값은 b, c, d 가 각각 최대일 때이다.
 d 의 최댓값은 99이고,
 $c < 4 \cdot 99 = 396$ 이므로 c 의 최댓값은 395,
 $b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b 의 최댓값은 1184,
 $a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a 의 최댓값은 2367

31. $a-2b-8 < (a+2b)x < 5a+4b+2$ 를 만족하는 x 의 범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b > 0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} < x < \frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{5a+4b+2}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a = -2, b = 5$ 이고 $a+2b > 0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b < 0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} < x < \frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{a-2b-8}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a = \frac{62}{33}, b = -\frac{59}{33}$ 이고 a, b 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a = -2, b = 5$ 이므로 $a \times b = -10$ 이다.

32. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 6 : 9 : 11 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 x, y, z 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 6 : 9 : 11 이므로

$$x + y = 6k$$

$$y + z = 9k$$

$$z + x = 11k$$

각 변끼리 더하면 $x + y + z = 13k$

따라서 $x = 4k, y = 2k, z = 7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$$\frac{x + y + z}{3} \leq 5 \text{ 에서 } 13k \leq 15$$

$$\therefore k \leq \frac{15}{13}$$

k 는 자연수이므로 $k = 1$

따라서 $x = 4, y = 2, z = 7$ 이고,

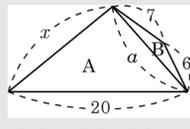
이 중 가장 큰 수는 7 이다.

33. 길이가 각각 6, 7, 20, x 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $7 < x < 33$

해설



위의 그림과 같이 보조선을 그려 그 길이를 a 라 하자.

삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$

삼각형 A 에서

1) x 가 가장 긴 변인 경우: $x < a + 20$

그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$

$\therefore x < 33$

2) 20 이 가장 긴 변인 경우: $20 < a + x$

그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$

$\therefore x > 7$

따라서 1), 2)에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

34. 지현이는 친구들과 놀이동산에서 관람차를 타기로 했다. 관람차 한 칸에 6명씩 타면 8명이 남고, 7명씩 앉으면 마지막 칸에는 3명 이상 5명 이하가 타게 된다고 한다. 다음 중 관람차의 칸 수가 될 수 없는 것을 모두 골라라.

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

관람차가 x 칸으로 이루어져 있다고 하면, 사람 수는 $6x+8$ 이다. 7명씩 탈 경우 $x-1$ 칸까지는 7명씩 타지만 마지막 칸에는 3명 이상 5명 이하가 타게 된다. 3명만 탈 경우를 식으로 나타내면, $7(x-1)+3$ 이고, 5명이 탈 경우를 식으로 나타내면 $7(x-1)+5$ 이다. 사람 수는 관람차에 7명씩 타고 마지막 칸 만 3명 이상일 경우와 5명 이하일 경우의 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $7(x-1)+3 \leq 6x+8 \leq 7(x-1)+5$ 이다. 이를 연립부등식으로 나

$$\text{타내면 } \begin{cases} 7(x-1)+3 \leq 6x+8 \\ 6x+8 \leq 7(x-1)+5 \end{cases} \quad \text{간단히 정리하면 } \begin{cases} x \leq 12 \\ x \geq 10 \end{cases}$$

$$10 \leq x \leq 12$$

따라서 관람차는 10 또는 11 또는 12 칸 이다.

35. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + ax + b < 0 \\ x^3 + x \geq 0 \end{cases}$ 의 해가

$0 \leq x < 2$ 이고 실수 a, b 가 $|a| + |b| = 3$ 을 만족할 때, a, b 의 값에 대하여 $2a + b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3 + x = x(x^2 + 1) \geq 0$ 에서
 $x^2 + 1 > 0$ 이므로 $x \geq 0$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} x^2 + ax + b < 0 \cdots \text{①} \\ x \geq 0 \cdots \text{②} \end{cases}$ 의 해가

$0 \leq x < 2$ 이기 위해서는 부등식 ①의 해가

$a < x < 2(a < 0)$ 이어야 한다.

따라서, $x^2 + ax + b = (x - a)(x - 2) = x^2 - (a + 2)x + 2a$

$$\therefore \begin{cases} a = -a - 2 \\ b = 2a \end{cases} \cdots \text{③}$$

$|a| + |b| = 3$ 이므로,

$$|-a - 2| + |2a| = 3$$

i) $a < -2$ 일 때,

$$-a - 2 - 2a = 3$$

$$\therefore a = -\frac{5}{3}$$

그러나 $a < -2$ 이므로 부적당

ii) $-2 \leq a < 0$ 일 때,

$$a + 2 - 2a = 3$$

$$\therefore a = -1$$

③에서 $a = -1, b = -2$

$$\therefore 2a + b = -4$$