1. 다음 중 사차방정식 $x^4+x^2+1=0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　② $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4+x^2+1=0$을 변형하면

$x^4+2x^2+1-x^2=0,$

$(x^2+1)^2-x^2=0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x)=0,$

$x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

2. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3)=\frac{5}{2}x^3$,

$x^3+4x^2+x-6=\frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3-4x^2-x+6=0$ 에서

$3x^3-8x^2-2x+12=0$을 풀면 $x=2(\text{cm})$

3. 연립이차방정식 $\begin{cases} 3x^2 + y = 6 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 x값을 모두 더하면?

① 0 ② 15 ③ 10 ④ -10 ⑤ -15

해설

$9x^2 - y^2 = 0$에 $3x^2 + y = 6$ 대입.

$9x^2 - (3x^2 - 6)^2 = -9x^4 + 45x^2 - 36 = 0$

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$

$x = \pm 1,\ \pm 2$

x의 합 : $+1 - 1 + 2 - 2 = 0$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x+y$의 값을 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? (단, x, y는 양수, $a > b$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - xy + y^2 = 7 \quad \cdots$ ㉠

$4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \quad \cdots$ ㉡

㉡ 식+2×㉠식에 대입하면

$6x^2 - 11xy + 3y^2 = 0 \ (3x-y)(2x-3y) = 0$

$\therefore \ 3x = y \ \ or \ \ 2x = 3y$

㉮: $3x = y$를 ㉠식에 대입하면

$7x^2 = 7 \ x = 1(x > 0), \quad y = 3$

$\therefore \ x + y = 4$

㉯: $2x = 3y$를 4×㉠식에 대입하면

$7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \ y = 2(y > 0), \ x = 3$

$\therefore \ x + y = 5$

$a > b$이므로 $a = 5, b = 4$

$\therefore \ a - b = 1$

5. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a > b,\ b > c$ 이면 $a > c$

② $a > b$ 이면 $a + c > b + c,\ a - c > b - c$

③ $a > b,\ c > 0$ 이면 $ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

④ $a > b,\ c < 0$ 이면 $ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

⑤ $a > b > 0$ 이면 $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

해설

⑤ 반례 $a = 2,\ b = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{b} = 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{2} < 1$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 3x - 4 < 14 \\ 2x + 5 > -1 \end{cases}$ 을 만족하는 정수 x 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{cases} 3x - 4 < 14 \\ 2x + 5 > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x < 18 \\ 2x > -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > -3 \end{cases}$$

$\therefore\ -3 < x < 6$

$\therefore\ x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

7. $3x-5 \le 10$, $x+2 > a$의 정수해가 1개가 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $4 \le a < 5$ ② $5 \le a < 6$ ③ $6 \le a < 7$

④ $7 \le a < 8$ ⑤ $8 \le a < 9$

해설

A : $3x \le 15 \rightarrow x \le 5$

B : $x > a-2$

$a-2 < x \le 5$에 속하는 정수가 1개여야 하므로

$4 \le a-2 < 5$

$\therefore 6 \le a < 7$

8. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

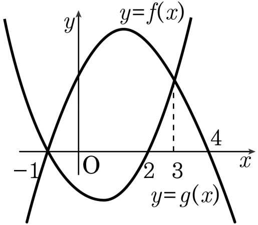
$m\neq -1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \qquad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

9. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \le 0$ 의 해를 구하면?



① $x \le -1$
② $-1 \le x \le 2$
③ $-1 \le x \le 3$
④ $2 \le x \le 3$
⑤ $2 \le x \le 4$

해설

$f(x) - g(x) \le 0$ 에서 $f(x) \le g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \le x \le 3$

10. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2-6x \geq a^2-6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \leq a \leq 0$　　② $-2 \leq a \leq 2$　　③ $0 \leq a \leq 4$

④ $2 \leq a \leq 4$　　⑤ $4 \leq a \leq 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,

$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \geq 0$

$a^2 - 6a + 8 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \leq 0$

$\therefore \ 2 \leq a \leq 4$

11. 사차방정식 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4+x^3+2x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+x+2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2+t=0,\ t(t+1)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=-1$

(i) $x+\frac{1}{x}=0$일 때, $x^2+1=0$

$\therefore x=\pm i$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1$일 때,

$x^2+1=-x,\ x^2+x+1=0$

$\therefore\ x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=\pm i$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ (-i)+i+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-1$

12. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b는 실수)

① $-i$ ② i ③ $-2i$
④ $3i$ ⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$
$(a+3)i+b-1=0$에서 a, b는 실수이므로 $a=-3, b=1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$
한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고
$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.
$\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\dfrac{e}{a}$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1
즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$
$\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\dfrac{1}{i}=-i$

13. 각 수가 다른 두 수의 곱이 되는 0이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$a = bc,\ b = ca,\ c = ab,$

$abc = (bc)(ca)(ab) = (abc)^2,$

$abc \neq 0,\quad abc = 1,$

$abc = a^2 = b^2 = c^2 = 1$

$a = \pm 1,\ b = \pm 1,\ c = \pm 1$

그러나 $abc = 1$ 이므로, $a,\ b,\ c$ 중에서 -1인 것은 없거나 2개이다.

$\therefore\ (a,\ b,\ c) = (1,1,1), (1,-1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,1)$

14. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1,\beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2,\beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$

15. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,

$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x$,

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$,

$x \leq 6$

$1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면

$12x - 5 < 8x + 6$,

$4x < 11$,

$x < \frac{11}{4}$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 $1, 2$ 의 2 개이다.

16. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

> [풀이]
> $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=$ (㉠) 이 된다.
> $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=$ (㉠) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
> 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
> x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=$ (㉢) 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면
$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

17. 두 부등식 $0.7-x \le -2-0.1x$, $\frac{2+x}{3} \ge x+a$의 공통 부분이 없을 때, a의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7-x \le -2-0.1x 7-10x \le -20-x -9x \le -27, \ x \ge 3$

$\frac{2+x}{3} \ge x+a 2+x \ge 3x+3a -2x \ge 3a-2, \ x \le 1-\frac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1-\frac{3}{2}a < 3$,

$-\frac{3}{2}a < 2$

$\therefore \ a > -\frac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

18. 15% 의 설탕물 300 g 이 있다. 여기에서 200 g 의 설탕물을 버리고 물 x g 을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x가 될 수 없는 것은?

① 25 ② 32 ③ 39 ④ 47 ⑤ 52

해설

설탕물을 200 g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.
따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15% 의 설탕물 100 g 이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15(\mathrm{g})$ 이다.

여기에 물 x g 을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \le \frac{15}{100+x} \times 100 \le 12$ 이다.
이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \le \dfrac{15}{100+x} \times 100 \\ \dfrac{15}{100+x} \times 100 \le 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \le 50 \\ x \ge 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \le x \le 50$ 이다.

19. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.

② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.

⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$일 때

$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로

$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로

$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로

$a<\frac{1}{2}$ 일때, $2<x<\frac{1}{a}$,

$a>\frac{1}{2}$ 일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

20. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 1

해설

$|x| < |a| \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \cdots$ ①

$\Leftrightarrow ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$ ②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

21. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$　② $a\le 1,\ 3\le a$　③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$　⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2 \cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ \ -1\le a\le\frac{1}{3} \cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

22. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

23. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$　② $-2 < a < 4$　③ $-4 \le a \le 2$
④ $\frac{2}{3} < a \le 4$　⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1
사이에 있으므로
(i) $D = a^2 - 4(2a-3) \ge 0$ 에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a-2)(a-6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$
(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$ 에서
$1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$ 에서
$3a > 2 \quad \therefore\ a > \frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의
방정식이 $x = -\frac{a}{2}$ 이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 a 의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$

24. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$
$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.
$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.
$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$
$\therefore$ $(x-1)(x-3) \ge 0$
$\therefore$ $x \le 1$, $x \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$
$\therefore$ $(x+1)(x-1) \ge 0$
$\therefore$ $x \le -1$, $x \ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $\therefore$ $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

25. 삼차방정식 $x^3 + px + 2 = 0$ 의 세 근이 모두 정수일 때, p 의 값을 구하면?

① 4　　② -3　　③ -2　　④ 4　　⑤ 5

해설

세 근을 α , β , γ 라고 하면

$\alpha + \beta + \gamma = 0$ ⋯⋯㉠

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$ ⋯⋯㉡

$\alpha\beta\gamma = -2$ ⋯⋯㉢

㉢에서

$-2 = (-1)\times1\times2 = 1\times1\times(-2) = (-1)(-1)(-2)$

㉠에서 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 이어야 하므로

$\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$

㉡에서 $p = 1\times1 + 1\times(-2) + (-2)\times1 = -3$

26. 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 방정식 $x^2+ax+2=0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a-b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -9

해설

$1+\sqrt{3}i$가 근이므로 $1-\sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+\alpha=-a\cdots\cdots$ ㉠

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b\cdots\cdots$ ㉡

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\alpha=-c\cdots\cdots$ ㉢

또, 방정식 $x^2+ax+2=0$ 과의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0\cdots\cdots$ ㉣

㉠에서 $\alpha=-a-2$ 를 ㉣에 대입하면

$(-a-2)^2+a(-a-2)+2=0$

$\therefore a=-3,\ \alpha=1$

㉡에서 $b=2\alpha+4=6$

㉢에서 $c=-4\alpha=-4$

$\therefore\ a-b+c=-3-6-4=-13$

27. 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

② $\alpha^4=1$

③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1=1$

④ α는 실수가 아니다.

⑤ α^3은 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이다.

해설

① α가 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이므로,
$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$
② α^4-1
$=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$이므로
$\alpha^4=1$
③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1$
$=(\alpha^4)^{25}+(\alpha^4)^{12}\cdot\alpha^2+(\alpha^4)^6\cdot\alpha+(\alpha^4)^3\cdot\alpha^3+1$
$=1+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+1=1$
④ $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)=0$에서
$x=-1$이라는 실근이 존재하므로
α는 실수일 수 있다.
⑤ $x=\alpha^3$을 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$에 대입하면,
$\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1$
$=(\alpha^4)^2\cdot\alpha+\alpha^4\cdot\alpha^2+\alpha^3+1$
$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+1=0$
$(\because\ \alpha^4=1)$

28. 두 개의 이차방정식 $x^2+ax+\frac{1}{a}=0$과 $x^2+bx+\frac{1}{b}=0$이 공통근을 가질 때, $ab(a+b)$의 값은? (단, $a \neq b$)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ a, b의 값에 따라 달라진다.

해설

공통근을 α라 하고 두 식에 대입하면

$\alpha^2+a\alpha+\frac{1}{a}=0 \quad \cdots\cdots$ ①

$\alpha^2+b\alpha+\frac{1}{b}=0 \quad \cdots\cdots$ ②

① − ②하면

$\therefore\ \alpha(a-b)+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0,\ (a-b)\left(\alpha-\frac{1}{ab}\right)=0$

$a \neq b$이므로 $\alpha=\frac{1}{ab}$

이것을 ①에 대입하면 $\left(\frac{1}{ab}\right)^2+a\cdot\frac{1}{ab}+\frac{1}{a}=0$

$1+a^2b+ab^2=1+ab(a+b)=0$

$\therefore\ ab(a+b)=-1$

29. A, B, C, D 네 명이 서로 네 번씩 바둑을 두어 각 대국의 결과마다 승자에게 2점, 패자에게 0점, 무승부일 때는 두 명 모두에게 1점씩을 준다. 대국의 결과가 다음 표와 같을 때, D가 얻은 점수를 구하면?

	승	무	패	점수
A	6	1	5	13
B	5	3	4	13
C	8	2	2	18
D	?	?	?	x

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

D가 a승 b무 c패를 했다고 하면

$a+b+c=4\cdot 3=12$ ······ ㉠

네 명이 모두 승수와 패수가 같아야 하므로

$6+5+8+a=5+4+2+c$

$\therefore\ c=a+8$ ······ ㉡

또, 무승부의 합은 항상 짝수이므로 b는 짝수이어야 한다.

㉠, ㉡에서 $2a+b=4$이고

$b=0$일 때 $a=2$, $b=2$일 때 $a=1$,

$b=4$일 때 $a=0$이므로

어느 경우에나 D가 얻은 점수는 4점이다.

30. a, b, c, d는 정수이고, $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$, $d < 100$을 만족시킬 때, a의 최댓값은?

① 2367 ② 2375 ③ 2391 ④ 2399 ⑤ 2400

해설

a의 최댓값은 b, c, d가 각각 최대일 때이다.
d의 최댓값은 99이고,
$c < 4 \cdot 99 = 396$이므로 c의 최댓값은 395,
$b < 3 \cdot 395 = 1185$ 이므로 b의 최댓값은 1184,
$a < 2 \cdot 1184 = 2368$ 이므로 a의 최댓값은 2367

31. $a-2b-8 < (a+2b)x < 5a+4b+2$ 를 만족하는 x 의 범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 정수 a, b 에 대하여 $a \times b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 부등식의 각 변을 $a+2b$ 로 나눌 때,

1) $a+2b>0$ 이면

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} < x < \frac{5a+4b+2}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 과 같으므로,

$$\frac{a-2b-8}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \ \frac{5a+4b+2}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=5$ 이고 $a+2b>0$ 을 만족하고 정수이므로 적합하다.

2) $a+2b<0$ 이면

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} < x < \frac{a-2b-8}{a+2b}$$

범위가 $-\frac{5}{2} < x < \frac{3}{2}$ 와 같으므로,

$$\frac{5a+4b+2}{a+2b} = -\frac{5}{2}, \ \frac{a-2b-8}{a+2b} = \frac{3}{2}$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{62}{33}$, $b=-\frac{59}{33}$ 이고 a, b 의 값은 정수가 아니므로 적합하지 않다.

따라서 $a=-2$, $b=5$ 이므로 $a \times b = -10$ 이다.

32. 세 자연수의 평균이 5 이하이고, 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 인 세 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 자연수를 각각 $x,\ y,\ z$ 라 하면 세 자연수 중 두 개씩을 골라 합을 구했을 때, 그 비가 $6:9:11$ 이므로

$x+y=6k$

$y+z=9k$

$z+x=11k$

각 변끼리 더하면 $x+y+z=13k$

따라서 $x=4k,\ y=2k,\ z=7k$

그런데 세 수의 평균이 5 이하이므로

$\dfrac{x+y+z}{3}\le 5$ 에서 $13k\le 15$

$\therefore\ k\le\dfrac{15}{13}$

k 는 자연수이므로 $k=1$

따라서 $x=4,\ y=2,\ z=7$ 이고,

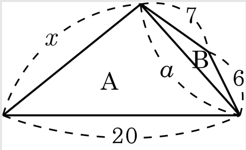
이 중 가장 큰 수는 7 이다.

33. 길이가 각각 6, 7, 20, x 인 선분을 끝점끼리 이어 붙여 볼록한 사각형을 만들 수 있는 x 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7 < x < 33$

해설



위의 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 a 라 하자.
삼각형 B 에서 $a < 7 + 6$, 즉 $a < 13$
삼각형 A 에서
1) x 가 가장 긴 변인 경우 : $x < a + 20$
그런데 $a < 13$ 이므로 $x < a + 20 < 13 + 20$
$\therefore\ x < 33$
2) 20 이 가장 긴 변인 경우 : $20 < a + x$
그런데 $a < 13$ 이므로 $20 < a + x < 13 + x$
$\therefore\ x > 7$
따라서 1), 2) 에 의해서 $7 < x < 33$ 이다.

34. 지현이는 친구들과 놀이동산에서 관람차를 타기로 했다. 관람차 한 칸에 6 명씩 타면 8 명이 남고, 7 명씩 앉으면 마지막 칸에는 3 명 이상 5 명 이하가 타게 된다고 한다. 다음 중 관람차의 칸 수가 될 수 없는 것을 모두 골라라.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

관람차가 x 칸으로 이루어져 있다고 하면, 사람 수는 $6x+8$ 이다. 7 명씩 탈 경우 $x-1$ 칸 까지는 7 명씩 타지만 마지막 칸에는 3 명 이상 5 명 이하가 타게 된다. 3 명만 탈 경우를 식으로 나타내면, $7(x-1)+3$ 이고, 5 명이 탈 경우를 식으로 나타내면 $7(x-1)+5$ 이다. 사람 수는 관람차에 7 명씩 타고 마지막 칸 만 3 명 이상일 경우와 5 명 이하일 경우의 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $7(x-1)+3 \le 6x+8 \le 7(x-1)+5$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 7(x-1)+3 \le 6x+8 \\ 6x+8 \le 7(x-1)+5 \end{cases}$ 간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 12 \\ x \ge 10 \end{cases}$

$10 \le x \le 12$

따라서 관람차는 10 또는 11 또는 12 칸 이다.

35. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0 \\ x^3+x\ge 0 \end{cases}$ 의 해가 $0\le x<2$이고 실수 a, b가 $|a|+|b|=3$을 만족할 때, a, b의 값에 대하여 $2a+b$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3+x=x(x^2+1)\ge 0$ 에서

$x^2+1>0$ 이므로 $x\ge 0$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b<0\cdots ① \\ x\ge 0\cdots ② \end{cases}$ 의 해가

$0\le x<2$ 이기 위해서는 부등식 ①의 해가

$a<x<2(a<0)$ 이어야 한다.

따라서, $x^2+ax+b=(x-a)(x-2)=x^2-(a+2)x+2a$

$\therefore \begin{cases} a=-a-2 \\ b=2a \end{cases} \cdots ③$

$|a|+|b|=3$ 이므로,

$|-a-2|+|2a|=3$

i) $a<-2$ 일 때,

$-a-2-2a=3$

$\therefore a=-\frac{5}{3}$

그러나 $a<-2$ 이므로 부적당

ii) $-2\le a<0$ 일 때,

$a+2-2a=3$

$\therefore a=-1$

③에서 $a=-1, b=-2$

$\therefore 2a+b=-4$