

1. 두 집합 $A = \{2, 4, a^2 - a - 1\}$, $B = \{2, a + 2, a^2 - 2a\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때의 a 값을 구하고 이 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 b 라 하면 다음 중 $a \times b$ 를 맞게 계산한 것은?

① -22 ② 15 ③ 33 ④ 13 ⑤ 11

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 $a^2 - a - 1 = 5$
 $a^2 - a - 6 = 0$, $(a - 3)(a + 2) = 0$,
 $a = -2$ 또는 3
 $a = -2$ 이면 $B = \{2, 0, 3\}$ 이므로 조건에 어긋난다.
 $\therefore a = 3$
그리고 $A = \{2, 4, 5\}$ 이므로 원소의 합 $b = 11 \therefore ab = 33$

2. 두 조건 p, q 가 다음과 같을 때, 항상 참인 명제는?

$p : 2x - 3 \geq 1 \quad q : |x| < 2$

- ① $p \rightarrow q$

② $q \rightarrow p$

③ $\sim p \rightarrow q$

④ $q \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$P : x \geq 2, Q : -2 < x < 2$
 $P \subset Q^c \leftrightarrow Q \subset P^c$
 $\therefore p \rightarrow \sim q(\text{참}) \leftrightarrow q \rightarrow \sim p(\text{참})$

3. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고, 명제 ‘ p 이면 q 이다.’가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

① $P - Q$

② $Q - P$

③ $P \cap Q$

④ $P^c \cap Q^c$

⑤ $Q \cup P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건 p 는 만족하지만 조건 q 는 만족하지 않는 것이므로 $x \in P$ 이고 $x \notin Q$ 인 x 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합 $P - Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

4. 다음에서 조건 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?

- ① $p : x = 0$ 이고 $y = 0, q : xy = 0$
- ② $p : x^2 = 9, q : x = 3$
- ③ $p : x, y$ 는 모두 짝수, $q : x + y$ 는 짝수
- ④ $p : x \neq 0$ 이고 $y \neq 0, q : xy \neq 0$
- ⑤ $p : x$ 는 유리수, $q : x^2$ 은 유리수

해설

- ① $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 0, y = 1$)
- ② $p \rightarrow q$: 거짓 ($x^2 = 9$ 이면 $x = \pm 3$)
- ③ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = 1, y = 3$ 이면 $x + y = 4$)
- ④ 필요충분조건
- ⑤ $q \rightarrow p$: 거짓 ($x = \sqrt{2}$ 이면 $x^2 = 2$)

5. $x \geq a$ 가 $x^2 - 4 < 0$ 의 필요조건이 되게 하는 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 - 4 < 0$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 $x \geq a$ 가 $-2 < x < 2$ 의 필요조건이 되기 위해서는 $a \leq -2$ 이어야 한다. 따라서, a 의 최댓값은 -2이다.

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = A$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \cap B = B$

② $A \cap B^c = B$

③ $A \cup B = U$

④ $A - B = \emptyset$

⑤ $B - A = U$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B \\ &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cap B \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cap B = A \cap B = A \\ & A \subset B \text{ 이므로 } A \cap B^c = \emptyset \text{ 이면} \\ & A \subset B \text{ 이므로 필요충분조건은 ④이다.} \end{aligned}$$

7. $a > 0, b > 0$ 일 때, $(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 25

해설

$$(2a + b) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} \right) = 16 + 1 + \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 이므로 } \frac{8b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 8$$

$$\therefore \text{최솟값은 } 17 + 8 = 25$$

8. 실수 a, b, x, y 에 대하여 $a^2 + b^2 = 1$ 이고 $x^2 + y^2 = 2$ 이 성립할 때, $ax + by$ 의 최댓값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ 에 주어진 값
 $a^2 + b^2 = 1, x^2 + y^2 = 2$ 을 대입하면
 $1 \times 2 \geq (ax + by)^2$ 이다.
따라서 $-\sqrt{2} \leq ax + by \leq \sqrt{2}$
 $\therefore ax + by$ 의 최댓값은
 $\sqrt{2}$ 이다.

9. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

- $\textcircled{\tiny ㉠} \ f : x \rightarrow |x|^2$
- $\textcircled{\tiny ㉡} \ g : x \rightarrow x + 2$
- $\textcircled{\tiny ㉢} \ h : x \rightarrow |x| + 1$
- $\textcircled{\tiny ㉣} \ i : x \rightarrow x^2 - 1$
- $\textcircled{\tiny ㉤} \ j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 3개
- ④ 4개
- ⑤ 5개

해설

$\textcircled{\tiny ㉠} \ f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
 $f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
 $f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
 $\textcircled{\tiny ㉡} \ g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
 $g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
 $g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$
 $\textcircled{\tiny ㉢} \ h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
 $h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
 $h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$
 $\textcircled{\tiny ㉣} \ i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
 $\textcircled{\tiny ㉤} \ j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

10. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $g(x+2) = f(x+1)$ 로 정의될 때, $g(0)$ 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

해설

$g(x+2) = f(x+1)$ 에서 $g(0)$ 은 $x = -2$ 에서의 값이므로 $f(-1)$ 이다.
따라서 $g(0) = f(-1) = 3$

11. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

12. 0 이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

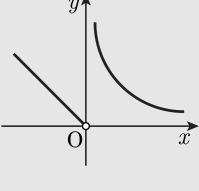
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \quad \text{일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?}$$

- I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = \frac{10}{3}$
II . $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$
III . $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

- ① I ② III ③ I , II ④ II , III ⑤ I , III

해설

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



I . $f(f(3)) + f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)$
 $= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ -<참>
II .
i) $x > 0$ 일 때, $-x < 0, \frac{1}{x} > 0$ 이므로
 $f(-x) = -(-x) = x,$
 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
ii) $x < 0$ 일 때, $-x > 0, \frac{1}{x} < 0$ 이므로
 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$
i), ii) 에서 $f(-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ -<참>
III . 반례) $\frac{1}{3} > -2$ 일 때,
 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 > 2 = f(-2)$ -<거짓>
따라서 옳은 것은 I , II 이다.

13. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 두 함수 f, g 를 X 에서 Y 로의 함수로 정의한다. $f(x) = x - 1$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f = g$ 에서
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로
 $f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots \textcircled{1}$
 $f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots \textcircled{2}$
 $f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$
 $\therefore abc = 0$

14. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 두 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \rightarrow Y$, $g(x) = ax + b$ 가 $f = g$ 일 때, ab 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f 와 g 의 정의역이 같으므로
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이면 $f = g$ 가 된다
 $f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(0) = 1 = g(0) = b \cdots \textcircled{㉡}$
 $f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서
 $a = 1$, $b = 1$
따라서 $ab = 1$

15. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1)$ 이다.
- ㉡ $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$ 이다.
- ㉢ $f(x) = x^3$ 은 일대일대응이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠ $f(x) = |x|$ 이면 $f(-1) = f(1) = 1$
- ㉡ $f(-1) = -1 + 1, f(0) = 0 - 0, f(1) = 1 - 1$
그러므로 $f(x) = x^3 - x$ 의 치역은 $\{0\}$
- ㉢ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$
그러므로 $f(x) = x^3$ 은 일대일대응

16. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것 중 옳지 않은 것은?

- ① $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3 \text{인 정수}\}$
- ② $A = \{x \mid -1 < x \leq 3 \text{인 정수}\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 자연수를 4로 나눈 나머지}\}$
- ④ $A = \{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$
- ⑤ $A = \{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \text{인 정수}\}$

해설

④ $\{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$ 에는 0, 1, 2, 3 이외에도 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 5, \dots$ 등 무수히 많은 원소가 있다.

17. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.

따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

18. 다음 조건을 만족하는 두 집합 A, B 에 대하여 $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

㉠ $A = \{2, a, a^2\}, B = \{b, c, 4\}$

㉡ $A \subset B, B \subset A$

㉢ a, b, c 가 서로 다른 자연수

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$A \subset B, B \subset A$ 이므로 $A = B$

$4 \in B$ 이므로 $4 \in A$

$a = 4$ 또는 $a^2 = 4$

(i) $a = 4$ 일 때, $A = \{2, 4, 16\}, B = \{b, c, 4\}$

$\therefore b = 2, c = 16$ 또는 $b = 16, c = 2$

(ii) $a^2 = 4$ 일 때, $a = 2$ (a 는 자연수)

$A = \{2, 2^2\} = \{2, 4\}, B = \{b, c, 4\}$

b 또는 c 가 2 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가

될 수 없다.

$\therefore a + b + c = 4 + 2 + 16 = 22$

19. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$ 일 때, 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수는?

$B \subset A, \{2, 3\} \subset B, n(B) = 4$

- ① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 10개 ⑤ 12개

해설

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
 $B \subset A, \{2, 3\} \subset B, n(B) = 4$ 이므로
 $B = \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 9\}, \{1, 2, 3, 18\},$
 $\{2, 3, 6, 9\}, \{2, 3, 6, 18\}, \{2, 3, 9, 18\}$

20. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하면?

- ㉠ $X \subset A$ ㉡ $\{3, 5\} \subset X$ ㉢ $n(X) \leq 5$

- ① 12 개 ② 13 개 ③ 14 개 ④ 15 개 ⑤ 16 개

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 에서 $\{3, 5\}$ 를 반드시 포함하며 원소의 개수가 5 개이하인 부분집합이다.
원소의 개수가 2 개인 부분집합 : $\{3, 5\}$
원소의 개수가 3 개인 부분집합 : $\{1, 3, 5\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 5, 11\}$
원소의 개수가 4 개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 9\}, \{1, 3, 5, 11\}, \{3, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 11\}, \{3, 5, 9, 11\}$
원소의 개수가 5 개인 부분집합 : $\{1, 3, 5, 7, 9\}, \{1, 3, 5, 7, 11\}, \{1, 3, 5, 9, 11\}, \{3, 5, 7, 9, 11\}$

21. 집합 $A = \{x|x \text{는 } 15 \text{의 약수}\}$, $B = \{x|x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 8개

해설

$A = \{1, 3, 5, 15\}, B = \{1, 3, 9\}$ 이므로
 $A \cap B = \{1, 3\}$
 $A \cup B = \{1, 3, 5, 9, 15\}$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$
 $(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
 X 는 원소 1, 3 을 포함하는
 $\{1, 3, 5, 9, 15\}$ 의 부분집합이므로
 (집합 X 의 갯수) $= 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

22. 학생 수가 40 명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A, B 를 사용해 본 학생 수를 조사했더니 각각 20명, 30 명이었다. 두 종류의 치약을 모두 사용해 본 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

- ① 10
- ② 20
- ③ 30
- ④ 40
- ⑤ 50

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 50 - n(A \cap B) \end{aligned}$$

$$n(A \cap B) = 50 - n(A \cup B) \cdots \textcircled{1}$$

i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 치약 A를 사용한 학생이 모두 치약 B를 사용한 경우이다 $\Rightarrow M = 20$

ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $\textcircled{1}$ 에서 $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우이다.

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 40, n(A \cap B) = 10 = m$$

$$\therefore m + M = 10 + 20 = 30$$

23. 공항에서 출국시에 통과되지 않은 물건을 소유하고 있을 때는 경고음이 울리게 되어 있다. 1건 적발될 때마다 출국 심사 시간은 x 분씩 늘어나며 y 명의 사람들이 심사를 받기 위해 줄을 서서 기다리고 있다. 기본 심사 시간은 한 사람 당 2분이며 10건이 적발되었다고 할 때, 1시간 이내에 심사를 마치기 위한 xy 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

10건이 적발되었으므로 늘어난 심사 시간은 $10x$,
 y 명이 기다리고 있으므로 기본 심사 시간은 $2y$ 분이다.
시간이내에 심사를 끝내야 하므로

$$10x + 2y \leq 60 \cdots \textcircled{A}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로

산술평균, 기하평균에 의하여

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{10x \cdot 2y}$$

$$10x + 2y \geq 2\sqrt{20xy} \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여

$$2\sqrt{20xy} \leq 60, 20xy \leq 900$$

$$\therefore xy \leq 45$$

따라서 xy 의 최댓값은 45이다.

24. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

25. 네 개의 명제 p, q, r, s 가 다음과 같은 관계를 만족시킬 때, 반드시 참인 명제는? (단, 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때 $p \Rightarrow q$ 로 나타낸다.)

$\textcircled{\sim} p \Rightarrow q$	$\textcircled{\sim} r$ 그리고 $p \Rightarrow \sim q$
$\textcircled{\sim} s \Rightarrow p$ 그리고 $\sim r$	$\textcircled{\sim} p \Rightarrow \sim s$

- ① p

② p, q

③ q, r
- ④ p, q, r

⑤ p, q, r, s

해설

$\textcircled{\sim} r$ 그리고 $p \rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \rightarrow r$ 또는 $\sim p$
 $\textcircled{\sim} p \Rightarrow \sim s \Leftrightarrow s \Rightarrow p$
 $\textcircled{\sim}$, $\textcircled{\sim}$ 에서 s 가 참이든, 거짓이든 반드시 p 는 참이다. $\textcircled{\sim}$ 에서 p 가 참이면 q 가 참이고 $\textcircled{\sim}$ 에서 q 가 참이면 r 도 참이다. ($\because \sim p$ 는 거짓) $\textcircled{\sim}$ 에서 대우가 참이므로 s 도 참이다.
 $\therefore p, q, r, s$ 모두 참이다.