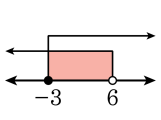
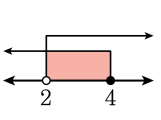
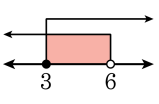
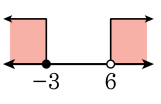
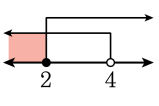
1. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-3<9 \\ 4x+1 \geq x-8 \end{cases}$ 의 해를 수직선에 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$\begin{cases} 2x-3<9 \rightarrow x<6 \\ 4x+1 \geq x-8 \rightarrow x \geq -3 \end{cases}$

$\therefore -3 \leq x < 6$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-11<5x+7 \\ 3(x-1)\le 4(2-x)+2 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 값 중 가장 큰 정수를 A , 가장 작은 정수를 B 라 할 때, $A+B$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

i) $2x-11<5x+7$

$\Rightarrow\ x>-6$

ii) $3(x-1)\le 4(2-x)+2$

$\Rightarrow\ 3x-3\le 8-4x+2$

$\Rightarrow\ 3x+4x\le 10+3$

$\Rightarrow\ x\le \dfrac{13}{7}$

$-6<x\le \dfrac{13}{7}$ 이므로

$A=1,\ B=-5$

$\therefore A+B=1+(-5)=-4$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+4<-2x+7 \\ x \geq a \end{cases}$ 을 만족하는 정수가 2 개일 때, a 의 값의 범위는?

① $-1 \leq a < 0$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-2 \leq a < -1$

④ $-2 < a \leq -1$ ⑤ $-3 < a \leq -2$

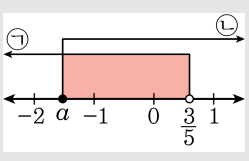
해설

$3x+4<-2x+7$ 에서

$x < \frac{3}{5}$ $\cdots$ ㉠

$x \geq a$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 정수가 2 개 존재하도록 수직선 위에 나타내면



$\therefore -2 < a \leq -1$

4. 부등식 $|x-2| < k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k > 0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2 - 8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k > 0$이므로 부등식 $|x-2| < k$ 을 풀면
$-k < x - 2 < k$
$-k + 2 < x < k + 2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k + 2 \ge -4$, $k + 2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6$, $k \le 2$
$\therefore 0 < k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

5. 다음 두 일차부등식을 만족하는 정수는 모두 몇 개인지 구하여라.

$$\frac{x-2}{3}+1 \le -\frac{x}{3}+\frac{3}{2}, \quad 0.2-0.1x > 1-0.5x$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

$\frac{x-2}{3}+1 \le -\frac{x}{3}+\frac{3}{2}$

양변에 6 을 곱하면

$2(x-2)+6 \le -2x+9$

$4x \le 9-2$

$x \le \frac{7}{4}$

$0.2-0.1x > 1-0.5x$

양변에 10 을 곱하면

$2-x > 10-5x$

$-x+5x > 10-2$

$4x > 8$

$x > 2$

∴ 해가 없다.

6. 부등식 $|x^2 - 4x - 6| \le 6$의 해를 구하면?

① $-2 \le x < 6$
② $0 \le x \le 4$
③ $x \le -2$또는$x \ge 6$
④ $-2 \le x \le 0$또는$4 \le x \le 6$
⑤ $x \le 0$또는$x \ge 4$

해설

$|x^2 - 4x - 6| \le 6$에서

$$\underbrace{-6 < x^2-4x-6}_{㉠} \quad \underbrace{\le 6}_{㉡}$$

㉠에서 $x^2 - 4x \ge 0, x(x-4) \ge 0$
$\therefore x \le 0$또는$x \ge 4$

㉡에서 $x^2 - 4x - 12 \le 0, (x+2)(x-6) \le 0$
$\therefore -2 \le x \le 6$

따라서 공통 범위를 구하면
$-2 \le x \le 0$ 또는 $4 \le x \le 6$

7. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\frac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

8. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$이 성립하기 위한 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$이 항상 성립하기 위해서는
$D/4 \leq 0$
$D/4 = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) \leq 0$
따라서 $-2 \leq a \leq 1$
$\therefore a = -2,\ -1,\ 0,\ 1$ (4개)

9. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0$ ·····㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0$ ·····㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0$ ·····㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx - 2k + 3 = 0$이 두 실근을 가지도록 실수 k의 값의 범위를 정하면?

① $k \le -3$ 또는 $k \ge 1$　② $-3 \le k \le 1$

③ $k = -3$ 또는 $k = 1$　④ $k < -3$ 또는 $k > 1$

⑤ $-3 < k < 1$

해설

두 실근을 갖는다는 것은
서로 다른 두 실근 또는 중근을 갖는다는 것이므로
$D' = k^2 - (-2k + 3) \ge 0$
$k^2 + 2k - 3 \ge 0$
$(k + 3)(k - 1) \ge 0$
$\therefore k \le -3$ 또는 $k \ge 1$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ a \ge 6,\ a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

12. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{3} \geq \dfrac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \dfrac{1}{2} < 0.8x + \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 2 개

해설

$\dfrac{2x+4}{3} \geq \dfrac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,

$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x$,

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$,

$x \leq 6$

$1.2x - \dfrac{1}{2} < 0.8x + \dfrac{3}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면

$12x - 5 < 8x + 6$,

$4x < 11$,

$x < \dfrac{11}{4}$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \dfrac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 $1, 2$ 의 2 개이다.

13. 연립부등식 $\begin{cases} 5x+7 \le 2x-2 \\ 2ax-2b \ge bx+4a \end{cases}$ 의 해가 $x \le -3$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하면?

① 3 ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{14}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ 5

해설

$5x+7 \le 2x-2$, $3x \le -9$, $x \le -3$ ··· ㉠

$2ax-2b \ge bx+4a$, $(2a-b)x \ge 4a+2b$ ··· ㉡

㉠, ㉡의 공통되는 부분이 $x \le -3$ 이 되기 위해서는 ㉡에서 $2a-b<0$ 이다.

이때, $x \le \frac{4a+2b}{2a-b}$ 이면서 $\frac{4a+2b}{2a-b} = -3$ 이어야 한다.

$4a+2b = -6a+3b$, $10a = b$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{10}$

14. 제주시에서 남서쪽 1100 km 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 50 km 이내가 폭풍우권이며, 30 km/h 의 속도로 북동진한다. 지름도 10 km/h 씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

① 15 시간 ② 16 시간 ③ 30 시간
④ 46 시간 ⑤ 50 시간

해설

$|-1100 + 30x - 0| \le 50 + 5x$
$-50 - 5x \le -1100 + 30x \le 50 + 5x$
$25x \le 1150$ 에서 $x \le 46$
$35x \ge 1050$ 에서 $x \ge 30$
$\therefore 30 \le x \le 46$
따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46-30 = 16$(시간) 이다.

15. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

16. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 -2, 1 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$　② $-2 < a < 4$　③ $-4 \le a \le 2$
④ $\frac{2}{3} < a \le 4$　⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 -2와 1 사이에 있으므로
(i) $D = a^2 - 4(2a - 3) \ge 0$ 에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a - 2)(a - 6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$
(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$ 에서
$1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$ 에서
$3a > 2$　$\therefore\ a > \frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = -\frac{a}{2}$ 이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 a의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$

17. a, b, c는 실수이고, $a(a+b+c)>0$, $a(b+2a)<0$을 만족시킬 때, ab 가 0, $b(a+b+c)$ 나 0이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① $<$, $<$　　② $<$, $>$

③ $>$, $>$　　④ $>$, $<$

⑤ 결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c)>0$에서 $a\neq 0$, $a+b+c\neq 0$임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a)=ab+2a^2<0$에서 $ab<-2a^2<0$이므로 $ab<0$이다.
또 $ab<0$이므로 $ab(a+b+c)^2<0$에서 $\{a(a+b+c)\}\{b(a+b+c)\}<0$이다.
그런데, $a(a+b+c)>0$이므로 $b(a+b+c)<0$이다.

18. $A = 2(x+m)$, $B = 5x+4n$, $C = 3x-2n$ 에 대하여 연립부등식 $A \le B \le C$ 를 풀었는데, 실수로 m 과 n 의 값을 바꾸어 푸는 바람에 해가 $8 \le x \le 21$ 이 되었다. 이 부등식을 올바르게 풀었을 때의 $A \le B \le C$ 를 만족하는 해의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$A = 2(x+m)$, $B = 5x+4n$, $C = 3x-2n$ 에 대하여 $A \le B \le C$ 를 풀면,

$$\begin{cases} 2(x+m) \le 5x+4n & \Rightarrow \ x \ge \frac{2}{3}(m-2n) \\ 5x+4n \le 3x-2n & \Rightarrow \ x \le -3n \end{cases}$$

$\frac{2}{3}(m-2n) \le x \le -3n$ 에서 잘못하여 m 과 n 의 값을 바꾸어 풀었으므로,

$\frac{2}{3}(n-2m) \le x \le -3m$ 이 되고 이 해집합이 $8 \le x \le 21$ 과 동일하므로,

$$\begin{cases} -3m = 21 & \Rightarrow \ m = -7 \\ \frac{2}{3}(n-2m) = 8 & \Rightarrow \ n = -2 \end{cases}$$

따라서 올바른 해를 구하면

$\frac{2}{3}\{-7-2\times(-2)\} \le x \le -3\times(-2)$ 이 되어

$-2 \le x \le 6$ 이고, 이를 만족하는 해의 최솟값은 -2 이다.

19. 어느 실험실의 용기에 100 g 의 소금물이 들어있다. 이 소금물의 농도는 현재 5.5 % 이다. 실험실에 하고자 하는 실험을 위해서는 소금물의 농도가 8 ~ 9 % 정도 유지되어야 한다고 한다. 이 수준을 유지하기 위해 최소 얼마만큼의 물을 증발시켜야 하는지 구하여라.

▶ 답 : g

▷ 정답 : 31.25 g

해설

5.5% 의 농도를 지닌 100 g 의 소금물에 들어있는 소금의 양은

$100 \times \frac{5.5}{100} = 5.5\,\mathrm{g}$ 이다.

증발시켜야 하는 물의 양을 x 라 하면

농도를 8 ~ 9 % 로 유지해야 하므로

$8 \le \frac{5.5}{100 - x} \times 100 \le 9$

$\therefore 31.25 \le x \le \frac{350}{9}$

따라서 최소 31.25 g 의 물을 증발시켜야 한다.

20. 두 부등식 $x^2+ax+b\le 0$, $x^2+x+a>0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $1<x\le 2$ 일 때, ab의 값은?

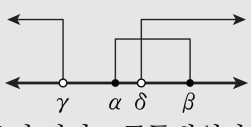
① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

$x^2+ax+b\le 0$ 의 해를 $\alpha\le x\le\beta$

$x^2+x+a>0$ 의 해를 $x<\gamma$, $x>\delta$

라 하고



조건에 맞게끔 수직선 위에 나타내면 다음과 같다. 공통범위가 $1<x\le 2$ 이므로

$\delta=1, \beta=2$ 가 되어야 한다.

$\delta=1$이 $x^2+x+a=0$의 근이므로

$1+1+a=0$에서 $a=-2$

$\beta=2$가 $x^2+ax+b=0$의 근이므로

$4+2a+b=0 \quad \therefore b=0$

따라서 $ab=0$