

1. 두 점 A(-5, -1), B(4, -5)에서 같은 거리에 있는 $y = -x$ 위에 있는 점의 좌표는?

- ① $\left(\frac{15}{26}, \frac{15}{26}\right)$ ② $\left(\frac{13}{26}, -\frac{13}{26}\right)$ ③ $\left(\frac{13}{26}, -\frac{15}{26}\right)$
④ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{13}{26}\right)$ ⑤ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$

해설

구하는 점을 $P(a, -a)$ 라 하면, ($\because y = -x$)

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(a+5)^2 + (-a+1)^2 = (a-4)^2 + (-a+5)^2$$

$$a^2 + 10a + 25 + a^2 - 2a + 1$$

$$= a^2 - 8a + 16 + a^2 - 10a + 25$$

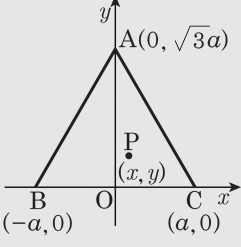
$$\Rightarrow 26a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{26}$$

$$\therefore P(a, -a) = \left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$$

2. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$ 이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned} 2\overline{PA}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로} \\ 2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\} \\ &= (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\text{정리하여 간단히 하면, } y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

∴ 직선

3. 중심이 직선 $y = x + 3$ ($x > 0$) 위에 있고, 점 (1, 2)를 지나며 또 x 축에 접하는 원의 반지름은?

① 2 ② 5 ③ 10 ④ 12 ⑤ 15

해설

중심을 $(a, a + 3)$ 이라 하면 반지름이 $a + 3$ 이므로 원의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - a - 3)^2 = (a + 3)^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
①이 점 (1, 2)를 지나므로 $(1 - a)^2 + (2 - a - 3)^2 = (a + 3)^2 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0$
 $\Rightarrow (a + 1)(a - 7) = 0$
 $\Rightarrow a = 7$ ($\because x > 0 \Rightarrow a > 0$)
 $\therefore$ 반지름 : $a + 3 = 7 + 3 = 10$

4. 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 을
 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x)^2 + y^2 + a(-x) + by = 0$
즉, $x^2 + y^2 - ax + by = 0$
이것이 $x^2 + y^2 + (2 - b)x + (2a - 4)y = 0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
 $-a = 2 - b, b = 2a - 4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 8$
 $\therefore a + b = 6 + 8 = 14$

5. 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 8$ 을 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭이동시켰더니 원 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ 이 되었다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 (a, b) 라 하면,
 $x^2 + y^2 = 8$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + c = 0$ 의 중심인 $(4, 2)$ 의 중점은 $y = ax + b$ 위를 지나고,
두 점을 이은 직선과 $y = ax + b$ 는 수직이다.
따라서 중점인 $(2, 1)$ 를 $y = ax + b$ 에 대입하면 $1 = 2a + b$.
수직조건은 기울기의 곱이 -1 이므로
 $y = ax + b$ 의 기울기가 a 이므로
두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$,
따라서 $a = -2, b = 5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20 - c = 8$.
 $c = 12$