1. 두 점 $\mathrm{A}(-5,-1)$, $\mathrm{B}(4,-5)$ 에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{15}{26},\frac{15}{26}\right)$ ② $\left(\frac{13}{26},-\frac{13}{26}\right)$ ③ $\left(\frac{13}{26},-\frac{15}{26}\right)$

④ $\left(\frac{15}{26},-\frac{13}{26}\right)$ ⑤ $\left(\frac{15}{26},-\frac{15}{26}\right)$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$ 라 하면, $(\because\ y=-x)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}} \Rightarrow\ \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(a+5)^2+(-a+1)^2=(a-4)^2+(-a+5)^2$

$a^2+10a+25+a^2-2a+1$

$=a^2-8a+16+a^2-10a+25$

$\Rightarrow\ 26a=15 \Rightarrow\ a=\frac{15}{26}$

$\therefore \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{15}{26},-\frac{15}{26}\right)$

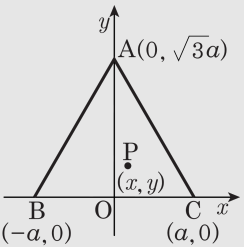
2. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형 ② 직선 ③ 선분

④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

3. 중심이 직선 $y = x + 3\ (x > 0\ )$ 위에 있고, 점 $(1,\ 2)$를 지나며 또 x 축에 접하는 원의 반지름은?

① 2 ② 5 ③ 10 ④ 12 ⑤ 15

해설

중심을 $(a,\ a+3)$ 이라 하면 반지름이
$a+3$ 이므로 원의 방정식은
$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2 \ \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(1,\ 2)$ 를 지나므로
$(1-a)^2 + (2-a-3)^2 = (a+3)^2 \Rightarrow\ a^2 - 6a - 7 = 0$
$\Rightarrow\ (a+1)(a-7) = 0$
$\Rightarrow\ a = 7 \quad (\because\ x > 0\ \Rightarrow\ a > 0)$
$\therefore$ 반지름 : $a + 3 = 7 + 3 = 10$

4. 원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 일 때, 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

원 $x^2+y^2+ax+by=0$ 을
y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
$(-x)^2+y^2+a(-x)+by=0$
즉, $x^2+y^2-ax+by=0$
이것이 $x^2+y^2+(2-b)x+(2a-4)y=0$ 과
같으므로 계수를 비교하면
$-a=2-b,\ b=2a-4$
두 식을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=8$
$\therefore\ a+b=6+8=14$

5. 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=8$을 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동 시켰더니 원 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$이 되었다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다. 구하려는 중심을 $(a,\ b)$라 하면,

$x^2+y^2=8$의 중심 $(0,\ 0)$과 $x^2+y^2-8x-4y+c=0$의 중심인 $(4,\ 2)$의 중점은 $y=ax+b$ 위를 지나고,

두 점을 이은 직선과 $y=ax+b$는 수직이다.

따라서 중점인 $(2\ ,\ 1\ )$를 $y=ax+b$에 대입하면 $1=2a+b$.

수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로

$y=ax+b$의 기울기가 a이므로

두 중심을 지나는 기울기는 $\frac{1}{2}$,

따라서 $a=-2, b=5$, 그리고 원의 반지름은 같으므로 $20-c=8$.

$c=12$