1. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변)$= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로

$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0$, $b = 1$

$\therefore\ a + b = 1$

2. 방정식 $|x-1|=2$의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

ⅰ) $x \geq 1$일 때

$|x-1| = x-1$이므로, $x-1=2$

$\therefore x=3$

ⅱ) $x<1$일 때

$|x-1| = -x+1$이므로, $-x+1=2$

$\therefore x=-1$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

3. 이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$의 값을 구여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=1$
$(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\cdot1=47$
$\therefore\ 47+5\cdot(-7)=47-35=12$

4. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

5. 연립부등식 $\begin{cases} -x+1<4 \\ 4x+2<-10 \end{cases}$ 의 해는?

① $x<-3$ ② $x=-3$ ③ $x>-3$
④ $-3<x<3$ ⑤ 해가 없다.

해설
(i) $-x+1<4$, $x>-3$
(ii) $4x+2<-10$, $x<-3$
따라서 해가 없다.

6. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다
② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수
④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설

$(x-3)^2 \geq 0$, (실수$)^2 \geq 0$이므로

$\therefore$ ⑤ 모든실수

7. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1\neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

8. x에 대한 다항식 $2x^3 - 5x^2 + ax + b$가 다항식 $x^2 - x + 2$로 나누어떨어지도록 상수 a, b의 값을 정하면?

① $a = 7,\ b = -6$ ② $a = 6,\ b = -5$ ③ $a = 5,\ b = -3$
④ $a = 4,\ b = -5$ ⑤ $a = 3,\ b = 7$

해설

직접 나누면
몫이 $2x - 3$, 나머지가 $(a - 7)x + b + 6$이므로
$2x^3 - 5x^2 + ax + b$
$= (x^2 - x + 2)(2x - 3) + (a - 7)x + b + 6$
$x^2 - x + 2$로 나누어떨어지기 위해서는 나머지가 0이어야 하므로
$(a - 7)x + b + 6 = 0$
$\therefore\ a = 7,\ b = -6$

9. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

10. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi}) = 5(1-i)$

$(\overline{x+yi}) = \dfrac{5(1-i)}{2+i} = 1-3i$

$x+yi = 1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

11. x에 대한 일차방정식 $5x+a=2x+12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x-2x=12-a, 3x=12-a$
$\therefore x=\frac{12-a}{3}$
자연수 $a=1,2,3,\cdots$ 을 대입했을 때,
$x=\frac{12-a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는
$12-a$ 가 3 의 배수이면서 $a<12$ 일 때이다.
i) $a=3$ 일 때, $x=\frac{12-3}{3}=3$
ii) $a=6$ 일 때, $x=\frac{12-6}{3}=2$
iii) $a=9$ 일 때, $x=\frac{12-9}{3}=1$
따라서 자연수 a 의 개수는 3 개이다.

12. 이차함수 $y = -(x-2)(x+6)$ 의 최댓값을 a 라 하고 ,그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a+b$ 을 값을 구하면?

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x-2)(x+6) \\ &= -(x^2+4x-12) \\ &= -(x+2)^2+16 \end{aligned}$$

$x=-2$ 일 때, 최댓값 16 을 가지며 최솟값은 없다.
$a=16,\ b=-2$ 이므로 $a+b=14$ 이다.

13. 모든 실수 x에 대해 이차부등식$x^2 - x(kx-3) + 3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$

$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$

$\therefore k < \dfrac{3}{12} = 0.25$

최대 정수 $k = 0$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2 - x + k = 0$의 한 근만이 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $1 < k < 2$ ② $-2 < k < 0$

③ $-2 \le k \le 0$ ④ $k < -2$ 또는 $k > 0$

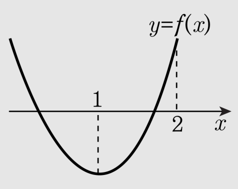
⑤ $-2 < k < -1$

해설

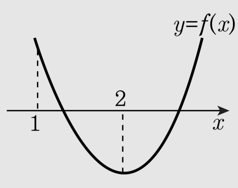
$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 - x + k$ 로 놓으면 다음 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 사이에서 x 축과 만나야 한다.



또는



$\therefore f(1) < 0,\ f(2) > 0$ 또는 $f(1) > 0,\ f(2) < 0$

즉, $f(1)f(2) = k(k+2) < 0$

$\therefore -2 < k < 0$

15. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　② 8　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot 4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

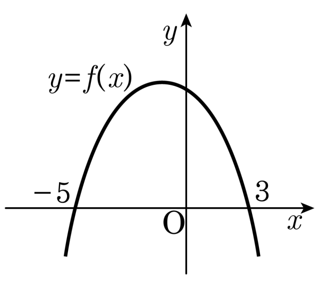
16. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$
$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에
$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$
$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로
$x-1$을 인수로 가져야 한다.
$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0$, $a=-1$

17. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a < 0)$ 으로 놓으면

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right) = \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

18. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ± 2　　② ± 4　　③ ± 8　　④ ± 16　　⑤ ± 32

해설

$$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots \text{㉢} \end{cases}$$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2 \qquad \therefore\ xyz=\pm 16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm 1,\ y=\beta=\pm 2,\ z=\gamma=\pm 8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm 16$

19. x^3 의 계수가 1 인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나눈 나머지는?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$ 에서 $f(x) = x$
즉, $f(x) - x$ 는 $x-1, x-2, x-3$ 을 인수로 한다.
$f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + x,\ f(4) = 10$

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 하면
(ⅰ) $f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$
(ⅱ) $f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$
(ⅲ) $f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 2n = 3$
위의 세식을 연립하여 풀면,
$a = -6, b = 12, c = -6$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$
$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$

20. $f(x) = x^3 - p$, $g(x) = x^3 - 2x$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값을 p로 바르게 나타낸 것은?

① p^3 ② $-p^3 + 2p$ ③ $-3p^3$

④ $3p^3 - 6p$ ⑤ $p^3 - 8p$

해설

$x^3 - p = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면
$\alpha^3 - p = 0,\ \beta^3 - p = 0,\ \gamma^3 - p = 0$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$,
$\alpha\beta\gamma = p$이 성립한다.
이 때,
$g(\alpha)b(\beta)g(\gamma) = (\alpha^3 - 2\alpha)(\beta^3 - 2\beta)(\gamma^3 - 2\gamma) = (p - 2\alpha)(p - 2\beta)(p - 2\gamma)$
$= p^3 - 2(\alpha + \beta + \gamma)p^2 + 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p - 8\alpha\beta\gamma = p^3 - 8p$