

1. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$ 으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면

$$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$$

$$\therefore 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면

$$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$$

$$\therefore 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -13$, $b = 8$

2. 두 다항식 $3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4$, $3x^3 - 3x^2 - 6x$ 의 최대공약수를 구하면?

- ① $(x-1)(x-2)$ ② $(x+1)(x+2)$ ③ $(x+1)(x-2)$
④ $(x-1)(x-2)$ ⑤ $(x+1)(x-1)$

해설

$$\begin{aligned} & 3x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 4 \\ &= (x+1)(x-2)(x+1)(3x-2) \\ & 3x^3 - 3x^2 - 6x = 3x(x-2)(x+1) \\ & \therefore \text{최대공약수} : (x-2)(x+1) \end{aligned}$$

3. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b = 9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

4. $z = \frac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ -1

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1-i$$

$$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$$

5. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$
모든 x 에 대해 성립하려면
 $a^2 - 4a + 3 = 0, a - 1 = 0$
공통근 : $a = 1$

6. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값을 고르면?

- ① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x - 5 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5 \\ &= (x - 3)^2 - 14 \end{aligned}$$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

7. 이차방정식 $x^2 + kx + k - 1 = 0$ 의 한 근이 다른 한 근의 3배가 되도록 하는 상수 k 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

한 근이 다른 한 근의 3배이므로 두 근을 α , 3α 라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 3\alpha = -k \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \cdot 3\alpha = k - 1 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $\alpha = -\frac{k}{4}$ 이것을 ㉡에 대입하면

$$3\left(-\frac{k}{4}\right)^2 = k - 1, \quad 3k^2 - 16k + 16 = 0, \quad (3k - 4)(k - 4) = 0$$

$$\therefore k = 4$$

해설

8. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$ 의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n, n + 1$ 이라 하면

$$\begin{cases} n + (n + 1) = a \cdots \cdots \textcircled{1} \\ n(n + 1) = a + 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } n = \frac{a - 1}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{a - 1}{2} \left(\frac{a - 1}{2} + 1 \right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a + 1)(a - 5) = 0$

$$a = -1, 5$$

$$\therefore -1 + 5 = 4$$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다. 이때, $a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax - b \\ &= (x - 3)^2 + 2 \\ &= x^2 - 6x + 11 \end{aligned}$$

$$2a = -6$$

$$\therefore a = -3$$

$$-b = 11$$

$$\therefore b = -11$$

$$\therefore a + b = -3 + (-11) = -14$$

10. a, b 가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$ 가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$ 의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$ 가 근이면 $1 - \sqrt{2}$ 도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \alpha$ 라 하면
 $(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3 \dots\dots\dots \textcircled{A}$
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a \dots\dots\dots \textcircled{B}$
 $\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b \dots\dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 1$

11. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라 할 때, $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$ 를 만족하는 실수 a, b 를 구하면?

① $a = -1, b = 2$ ② $a = 2, b = -3$ ③ $a = -3, b = 1$

④ $a = -1, b = 1$ ⑤ $a = 1, b = 2$

해설

$$x^3 - 1 = 0 \text{에서 } (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$\therefore x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이 w 이다.

$$\therefore w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$$

$$\Rightarrow w^2 = -w - 1$$

$$\therefore 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$$

$$= 1 + 2w + 3w^2 + 4$$

$$= 1 + 2w + 3(-w - 1) + 4$$

$$= -w + 2$$

$$\therefore -w + 2 = aw + b$$

a, b 는 실수이고, w 는 허수이므로

$$a = -1, b = 2$$

12. 방정식 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 을 만족하는 두 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$ 에서
 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$
 x, y 는 실수이므로 $x = -1, y = 2$
 $\therefore x + y = -1 + 2 = 1$

13. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1 < x+3 \\ 5x \geq 3x-4 \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 는 몇 개인가?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$$\begin{cases} 2x-1 < x+3 \\ 5x \geq 3x-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-x < 3+1 \\ 5x-3x \geq -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\therefore -2 \leq x < 4$$

$$\therefore x = -2, -1, 0, 1, 2, 3 \text{ 이므로 } 6 \text{ 개}$$

14. 부등식 $|x - k| \leq 3$ 을 만족하는 x 의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $3\sqrt{2}$

④ 4

⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$$|x - k| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x - k \leq 3,$$

$$-3 + k \leq x \leq 3 + k$$

따라서 x 의 최댓값은 $3 + k$,

최솟값은 $-3 + k$ 이므로

$$(-3 + k)(3 + k) = 9$$

$$k^2 - 9 = 9$$

$$k^2 = 18 \quad \therefore k = \pm 3\sqrt{2}$$

k 는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

15. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이고 $abc = 1$ 일 때, $(a^3 + b^3 + c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 16 ⑤ 25

해설

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a + b + c) \times 0 + 3abc = 0 + 3 \cdot (1) = 3 \\ &\therefore (a^3 + b^3 + c^3)^2 = 9 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \quad a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0 \\ & \frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0 \\ & \therefore a = b = c \rightarrow abc = a^3 = b^3 = c^3 = 1 \\ & (a^3 + b^3 + c^3)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \end{aligned}$$

16. 삼각형의 세변의 길이를 x, y, z 라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

- ① x 가 빗변인 직각삼각형
- ② y 가 빗변인 직각삼각형
- ③ z 가 빗변인 직각삼각형
- ④ $x = y$ 인 이등변삼각형
- ⑤ $x = y, z$ 가 빗변인 직각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & (x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z \\ &= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z \\ &= (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z \\ &\therefore (x+y)(x^2 + z^2 - y^2)z = 0 \\ &x^2 + z^2 - y^2 = 0 \quad (\because x, y, z \text{는 모두 양수}) \\ &\therefore x^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y \text{가 빗변인 직각삼각형} \end{aligned}$$

17. 임의의 실수 x 에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$ 가 실수일 때, 계수 a, b 가 만족하는 조건을 구하면?

- ① $0 \leq a \leq 4b$ ② $0 < a \leq 4b$ ③ $0 \leq a < 4b$
④ $0 < a < 4b$ ⑤ $0 < a < 4b$

해설

모든 실수 x 에 대하여
 $ax^2+ax+b \geq 0$ 을 만족해야 하므로
i) $a=0$ 일 때, $b \geq 0 \cdots \textcircled{1}$
ii) $a > 0$ 일 때,
 $D = a^2 - 4ab \leq 0$
 $a - 4b \leq 0 \cdots \textcircled{2}$
①, ②에서 $0 \leq a \leq 4b$

18. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a < 1$

② $1 \leq a < 2$

③ $2 \leq a < 3$

④ $3 \leq a < 4$

⑤ $4 \leq a < 5$

해설

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x - a)^2 - a^2 + a + 2$$

i) $D/4 = a^2 - a - 2 \geq 0, \quad a \leq -1 \text{ or } a \geq 2$

ii) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3$

iii) 대칭축 $x = a > 1$

i), ii), iii)에서 $2 \leq a < 3$

19. 다항식 $f(x) = x^4 + ax + b$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 3 ④ -4 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} \text{(i) } f(x) &= x^4 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \\ f(1) &= 1 + a + b = 0 \\ \therefore b &= -(a+1) \\ \text{(ii) } f(x) &= x^4 + ax - (a+1) = (x-1)^2 Q(x) \\ (x^4 - 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) + a(x-1) &= (x-1)^2 Q(x) \\ \therefore x^3 + x^2 + x + 1 + a &= (x-1)Q(x) \\ x=1 \text{을 대입하면 } 4 + a &= 0 \quad \therefore a = -4 \\ b = -(a+1) \text{에서 } b &= 3 \\ \therefore a + b &= -1 \end{aligned}$$

20. 부등식 $a+7 \leq ax+b \leq 4b+2a$ 의 해가 $2 \leq x \leq 8$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하면?

① $a = -2, b = -1$

② $a = -1, b = 0$

③ $a = \frac{1}{3}, b = \frac{7}{3}$

④ $a = \frac{7}{3}, b = \frac{14}{3}$

⑤ $a = 2, b = -1$

해설

$$a+7 \leq ax+b \leq 4b+2a$$

(1) $a > 0$ 일 때,

$$a+7 \leq ax+b, x \geq \frac{a-b+7}{a}$$

$$ax+b \leq 4b+2a, x \leq \frac{3b+2a}{a}$$

$$\frac{a-b+7}{a} \leq x \leq \frac{3b+2a}{a}$$

$$\therefore \frac{a-b+7}{a} = 2, \frac{3b+2a}{a} = 8$$

$$\therefore a = \frac{7}{3}, b = \frac{14}{3}$$

(2) $a < 0$ 일 때

$$\frac{3b+2a}{a} \leq x \leq \frac{a-b+7}{a}$$

$$\therefore \frac{3b+2a}{a} = 2, \frac{a-b+7}{a} = 8$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

($a < 0$ 이어야 하므로 조건을 만족하지 않는다.)