1. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$　　② $x \le -1$　　③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$　　⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\frac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

2. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab = 6$

해설

$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$(x-2)(x-3) < 0$ 전개하면

$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

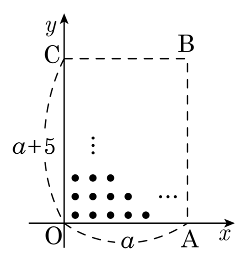
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해

양변에 -1 을 곱하면

$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

3. 다음 그림과 같이 원점을 모서리로 하고, $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{OC}} = a + 5$ 인 직사각형 OABC 가 있다. 사각형 OABC 내부의 격자점의 수가 50 개 이하가 되도록 할 때, a 의 최댓값은? (단, $a > 0$ 이고, 격자점은 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점이다.)



① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

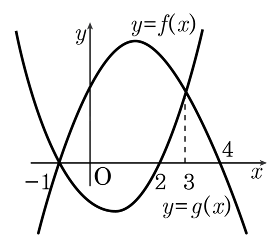
해설

$(a-1)(a+4) \le 50$

$a^2 + 3a - 54 = (a+9)(a-6) \le 0$

$\therefore 0 < a \le 6$

4. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) - g(x) \le 0$ 의 해를 구하면?



① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 2$

③ $-1 \le x \le 3$ ④ $2 \le x \le 3$

⑤ $2 \le x \le 4$

해설

$f(x) - g(x) \le 0$ 에서 $f(x) \le g(x)$ 이 부등식을 만족하는 x 의 값의 범위는 $y = f(x)$ 의 그래프가 $y = g(x)$ 의 그래프와 같거나 아래쪽에 있는 부분이므로 $-1 \le x \le 3$

5. $-2 \le x \le 2$ 일 때, x 에 대한 부등식 $x^2-6x \ge a^2-6a$ 가 항상 성립하기 위한 a 의 값의 범위는?

① $-4 \le a \le 0$　② $-2 \le a \le 2$　③ $0 \le a \le 4$
④ $2 \le a \le 4$　⑤ $4 \le a \le 6$

해설

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 6a$ 라 놓고
$-2 \le x \le 2$ 에서
$f(x) > 0$ 일 때, a 의 값의 범위를 구한다.
$f(x) = (x-3)^2 - a^2 + 6a - 9$ 이므로
$-2 \le x \le 2$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $x = 2$ 일 때,
$f(2) = 4 - 12 - a^2 + 6a \ge 0$
$a^2 - 6a + 8 \le 0 \quad \Rightarrow \quad (a-2)(a-4) \le 0$
$\therefore \ 2 \le a \le 4$

6. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ii) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0,\ \ a \ge 6,\ \ a \le -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

7. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$　② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$　③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$　⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면

$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$

$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$

$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$

$10a + 10 = -14a + 13$

$\therefore\ 24a = 3$

$\therefore\ a = \frac{1}{8},\ 2a = \frac{1}{4}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

8. 길이가 36인 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 C라 하고 선분 BC를 $4\ :\ 1$로 외분하는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

수직선 위에서
A(0), B(36) 이라 하고, C(x)라 하면
$$x = \frac{3 \cdot 36 + 0 \cdot 1}{3+1} = 27$$
B(36), C(27)이므로 D(y)라 하면
$$y = \frac{4 \cdot 27 - 1 \cdot 36}{4-1} = 24$$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}} = 24$

9. 세 점 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,2)$에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$=3x^2-4x+3y^2-4y+6$

$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{10}{3}$

$\therefore$ $P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

10. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$\therefore \dfrac{-3-1}{-2-1} = \dfrac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$

$\Rightarrow \therefore k = 4$

11. 직선 $(2k-1)x+(k+3)y-(k+10)=0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, a^2+b^2 의 값은?

① 4　　② 5　　③ 9　　④ 10　　⑤ 13

해설

k 에 대하여 정리하면

$(2x+y-1)k+(-x+3y-10)=0$

이 직선은 k 의 값에 관계없이

다음 두 직선의 교점을 지난다.

$2x+y-1=0,\quad -x+3y-10=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=3$

즉, $a=-1,\ b=3$

따라서 구하고자 하는 값은 10 이다.

12. 두 직선 $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ 의 교점과 직선 $4x+3y-1=0$ 사이의 거리는?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x-3y+1=0$, $x+y-3=0$의 교점은 $(2,1)$

$\therefore$ $4x+3y-1=0$ 까지의 거리 :

$$\frac{|4\times2+3\times1-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

13. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$$3x - y - 6 = 0\ , \quad 3x - y + k = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선 $3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$|6 + k| = 10$

따라서 $k = 4$ ($\because$ k 는 양수)

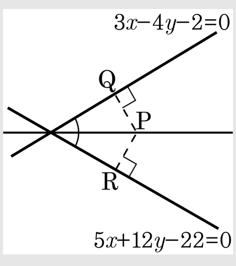
14. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a는 양수, a, b, c는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

15. 점 Q가 직선 $2x+y-4=0$ 위를 움직일 때, 점 $A(-2,3)$과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

① $4x+2y-3=0$　　② $2x+3y+1=0$
③ $4x-3y+1=0$　　④ $x-4y-3=0$
⑤ $-x+y+2=0$

해설

점 $A(-2,3)$, $Q(x,\ y)$의 중점의 좌표를 $P(X,\ Y)$라 하면,

$P(X,\ Y)=P\left(\frac{x-2}{2},\ \frac{y+3}{2}\right)$이므로

$X=\frac{x-2}{2}$, $Y=\frac{y+3}{2}$

$\therefore\ x=2X+2$, $y=2Y-3$

이것을 $2x+y-4=0$에 대입하면

$2(2X+2)+(2Y-3)-4=0$

$4X+2Y-3=0$

$\therefore\ 4x+2y-3=0$

16. 부등식 $x^2-3<x+\sqrt{4x^2+4x+1}$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2-3<x+|2x+1|$

(i) $x\ge -\frac{1}{2}$일 때,

$x^2-3<x+2x+1,\ x^2-3x-4<0$

$(x-4)(x+1)<0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x<4$

(ii) $x<-\frac{1}{2}$일 때,

$x^2-3<x-(2x+1),\ x^2+x-2<0$

$(x+2)(x-1)<0$

$\therefore\ -2<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-2<x<4$

$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=4$

$\therefore\ \alpha+\beta=2$

17. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1,\ \ b>2$ ② $a=1,\ \ b<2$ ③ $a=2,\ \ b>1$
④ $a=2,\ \ b\geq 1$ ⑤ $a=2,\ \ b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고
임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는
$D/4<0$를 만족해야 한다.
$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$
$\therefore (2-a)y+1-b<0\cdots$①
①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은
$(2-a)=0,\ \ 1-b<0,$
$\therefore a=2,\ \ b>1$

18. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=k \\ x+y+2z=2k^2 \end{cases}$ 의 해 x, y, z가 모두 양수일 때, k의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2}<k<0$　② $1<k<\frac{3}{2}$　③ $\frac{1}{2}<k<\frac{3}{4}$
④ $-2<k<-\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{2}<k<1$

해설

ⅰ) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \cdots ㉠ \\ x+2y+z=k \cdots ㉡ \\ x+y+2z=2k^2 \cdots ㉢ \end{cases}$ 라 하면

㉠×3－㉡－㉢에서
$4x=-2k^2-k+3$
$=-(2k+3)(k-1)>0 \cdots$ ㉣
㉡×3－㉢－㉠에서
$4y=-2k^2+3k-1$
$=-(2k-1)(k-1)>0 \cdots$ ㉤
㉢×3－㉠－㉡에서
$4z=6k^2-k-1$
$=(3k+1)(2k-1)>0 \cdots$ ㉥

ⅱ) ㉣ 에서 $-\frac{3}{2}<k<1$

㉤에서 $\frac{1}{2}<k<1$

㉥에서 $k<-\frac{1}{3}, k>\frac{1}{2}$

이들의 공통부분은 $\frac{1}{2}<k<1$

19. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

㉠ $b^2 - 4ac > 0$　　㉡ $a + c < b$

㉢ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
㉡주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

20. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a의 개수는?(단, $f(x)=x^2-2ax+4$로 두고 풀어라.)

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2-2ax+4=0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면
(i) $D>0$, (ii) $f(-3)>0$, (iii) $f(3)>0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $\mathrm{D}>0$에서 $\frac{\mathrm{D}}{4}=a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

$\therefore a<-2,\ a>2$

(ii) $f(-3)>0$에서

$f(-3)=9+6a+4>0,\ \ 6a>-13$

$\therefore a>-\frac{13}{6}$

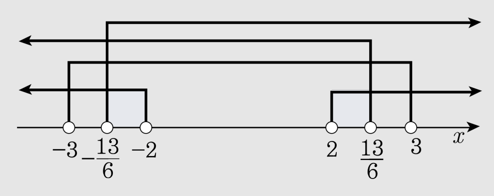
(iii) $f(3)>0$에서

$f(3)=9-6a+4>0,\ 13>6a,\ \ \therefore \frac{13}{6}>a$

(iv) 대칭축의 방정식 $x=-\frac{(-2a)}{2}=a$ 에서

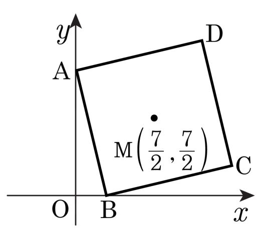
$-3<a<3$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore\ -\frac{13}{6}<a<-2,\ 2<a<\frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

21. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$일 때, $\triangle$OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

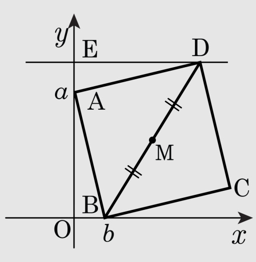


① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 A$(0, a)$, B$(b, 0)$이라 하고 점 D를 지나면서
x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle$OAB $\equiv$ $\triangle$EDA
따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$
이므로 D$(a, a+b)$
이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로
$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$
즉, $\frac{a+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $a+b=7$
또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로
$\triangle$OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\sqrt{a^2+b^2} = 5, a^2+b^2 = 25$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(7^2 - 25\right) = 6$$

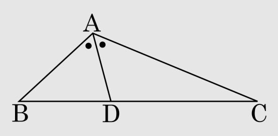


22. 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(-1,\ \sqrt{3})$, $C(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 1 : 4 ④ 2 : 3 ⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$
$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$



23. 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 $2\ :\ 1$로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\frac{b-2}{a-3}=2$, $b-2=2(a-3)$, $b=2a-4 \cdots$ ㉠

$\overline{AB}$ 를 $2\ :\ 1$ 로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

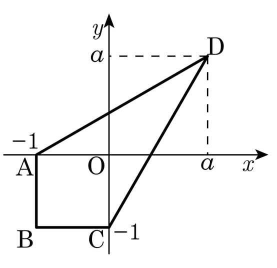
24. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$2x - y - 4 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
$3x - 4y + 9 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
$4x + 3y + 12 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = 5,\ y = 6$
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x = 0,\ y = -4$
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x = -3,\ y = 0$
세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$, $4x + 3y + 12 = 0$ 으로 이루어지는
삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0, -4)$, $C(-3, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.
따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x + 3y + 12 = 0$
사이의 거리는 $\dfrac{|4 \times 5 + 3 \times 6 + 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{|50|}{5} = 10$
또, $\overline{BC} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 + 4)^2} = 5$
따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$

25. 좌표평면 위의 네 점 A$(-1, 0)$, B$(-1, -1)$, C$(0, -1)$, D(a, a)를 꼭지점으로 하는 사각형 ABCD가 있다.

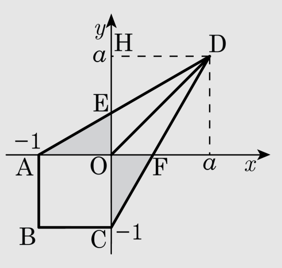


y축이 사각형 ABCD의 넓이를 이등분할 때, 양수 a의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　③ $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

④ $\dfrac{2+\sqrt{5}}{2}$　⑤ $\sqrt{5}$

해설



$\triangle$ AOE $=$ $\triangle$ COF이므로 $\square$ ABCO $=$ $\square$ OFDE이다.

따라서 $\triangle$ ODE $= \dfrac{1}{2}$ $\square$ABCO $= \dfrac{1}{2}$이다.

점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

점 E의 좌표를 $(0, k)$라 하면

$\triangle$AOE $\backsim$ $\triangle$DHE이므로

$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{OE}} : \overline{\mathrm{HE}}$에서

$1 : a = k : (a-k)$, $ak = a-k$

$\therefore\ k = \dfrac{a}{a+1}$

$\triangle\mathrm{ODE} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a}{a+1} \times a = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{a^2}{a+1} = 1$에서 $a^2 - a - 1 = 0$이므로

$\therefore a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because\ a > 0)$