1. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{1}{7} \end{cases}$ 에서 xyz의 값을 구하면?

① $-\dfrac{1}{6}$ ② -12 ③ -3 ④ $-\dfrac{1}{12}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

해설

준식의 역수를 취하면

$\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2,$

$\dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3,$

$\dfrac{x+z}{xz}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=7$

위 세 식의 합을 구하면

$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\times 2=12$ 이고,

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6$ 이다.

각각의 식을 빼서 역수를 취하면

$x=\dfrac{1}{3}, y=-1, z=\dfrac{1}{4}$ 이고,

$\therefore\ xyz=-\dfrac{1}{12}$

2. 속리산 일대를 며칠 동안 38인승 관광버스 1대를 빌려 여행을 하려고 하는데 현재 신청한 사람 중에서 4명이 취소하면 나머지 사람들이 버스 대여료로 1만 원씩 더 내고, 현재 신청한 사람보다 6명이 더 신청하면 1만 원씩 적게 낸다고 한다. 현재 신청한 사람은 모두 몇 명인가?

① 20명 ② 24명 ③ 26명 ④ 30명 ⑤ 36명

해설

현재 신청한 사람 수를 x명, 버스 대여료를 y원, 1인당 내는 버스 대여료를 a만 원이라 하면

$y = ax$, $y = x(a+1) - 4(a+1)$,

$y = x(a-1) + 6(a-1)$ 이므로

$ax = x(a+1) - 4(a+1) = x(a-1) + 6(a-1)$

$$\begin{cases} ax = x(a+1) - 4(a+1), \ x - 4a = 4 & \cdots ㉠ \\ ax = x(a-1) + 6(a-1), \ -x + 6a = 6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 연립

하여 풀면 $x = 24$, $a = 5$

따라서 현재 신청한 사람은 모두 24명이다.

3. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+by=7 \\ ax-by=3 \end{cases}$ 에서 $x,\ y$는 모두 자연수이다. 다음 중 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은? (단, a는 0 이상의 정수, b는 정수)

① -3 ② -1 ③ 4 ④ 8 ⑤ 13

해설

$\begin{cases} 2x+by=7 \ \cdots\cdots ㉠ \\ ax-by=3 \ \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 에서 ㉠ + ㉡을 하면 $(2+a)x=10$

$\therefore x=\dfrac{10}{2+a}$

x가 자연수가 되려면 $a=0,\ 3,\ 8$ 이어야 한다.

i) $a=0$ 이면 $x=5$ 이것을 ㉠에 대입하면

$by=-3,\ y=-\dfrac{3}{b}$ 이 자연수가 되려면

$b=-1,\ -3$

ii) $a=3$ 이면 $x=2$ 이것을 ㉠에 대입하면

$by=3,\ y=\dfrac{3}{b}$ 이 자연수가 되려면 $b=1,\ 3$

iii) $a=8$ 이면 $x=1$ 이것을 ㉠에 대입하면

$by=5,\ y=\dfrac{5}{b}$ 가 자연수가 되려면 $b=1,\ 5$

i), ii), iii) 에서

$a=0$이면 $b=-1,\ -3$ $\therefore\ a+b=-1,\ -3$

$a=3$이면 $b=1,\ 3$ $\therefore\ a+b=4,\ 6$

$a=8$이면 $b=1,\ 5$ $\therefore\ a+b=9,\ 13$

따라서 8 은 $a+b$ 의 값이 될 수 없다.

4. 두 개의 컵 A, B 에 각각 $a\,\%$ 의 소금물 1000g , $b\,\%$ 의 소금물 600g 이 들어 있다. A 의 소금물의 $20\,\%$ 를 B 에 넣어 잘 섞은 후, B 의 소금물의 $50\,\%$ 를 A 에 넣고 잘 섞었다. 그 결과 A 는 $12\,\%$, B 는 $8\,\%$ 의 소금물이 되었다. 이 때, $2a-b$ 의 값은?

① 22 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 28

해설

i) A 의 소금물의 $20\,\%$ 를 B 에 섞은 후

A 의 소금물 : $800(\mathrm{g})$

소금 : $800\times\dfrac{a}{100}=8a(\mathrm{g})$

B 의 소금물 : $800(\mathrm{g})$

소금 : $600\times\dfrac{b}{100}+200\times\dfrac{a}{100}=6b+2a(\mathrm{g})$

ii) B 의 소금물의 $50\,\%$ 를 A 에 섞은 후

A 의 소금물 : $800+400=1200(\mathrm{g})$

소금 : $8a+\dfrac{6b+2a}{2}=9a+3b(\mathrm{g})$

B 의 소금물 : $400(\mathrm{g})$

소금 : $\dfrac{2a+6b}{2}=a+3b(\mathrm{g})$

따라서 A 의 농도는 $\dfrac{9a+3b}{1200}\times100=12(\,\%)$

B 의 농도는 $\dfrac{a+3b}{400}\times100=8(\,\%)$

$$\begin{cases}3a+b=48\\a+3b=32\end{cases}$$

$-8b=-48\ \therefore\ b=6$

$a+18=32\ \therefore\ a=14$

$\therefore 2a-b=28-6=22$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+y=kx \end{cases}$ 가 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가질 때, 상수 k의 값은 ?

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가진다는 것은 해가 무수히 많다는 뜻과 같다.

$\begin{cases} x+2y=0 \\ (3-k)x+y=0 \end{cases}$ 에서

$\frac{1}{3-k}=\frac{2}{1}\quad \therefore k=\frac{5}{2}$

6. 두 연립방정식 $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\frac{11}{6} \\ ax+by=17 \end{cases}$ 와 $\begin{cases} ax-by=13 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-\frac{5}{6} \end{cases}$ 의 해가 같을 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

$\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\frac{11}{6} \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-\frac{5}{6} \end{cases}$

$\frac{1}{x}=A, \frac{1}{y}=B$라고 하면

$\Rightarrow \begin{cases} 4A+B=\frac{11}{6} \\ 2A-3B=-\frac{5}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 24A+6B=11 & \cdots ㉠ \\ 12A-18B=-5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $-2\times$ ㉡을 하면 $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{1}{2}$

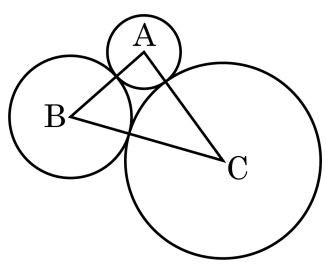
$\therefore x=3,\ y=2$

$\begin{cases} ax+by=17 \\ ax-by=13 \end{cases}$ 에 $x=3$, $y=2$ 을 대입하면

$\begin{cases} 3a+2b=17 \\ 3a-2b=13 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $a=5,\ b=1$ 이므로 $a+b=6$이다.

7. 다음 그림과 같이 세 원 A, B, C 가 접해 있다. $\overline{AB} = 8\text{cm}$,$\overline{BC} = 13\text{cm}$,$\overline{CA} = 11\text{cm}$ 일 때, 세 원의 넓이의 비는?



① 3 : 5 : 7 ② 12 : 35 : 24 ③ 8 : 13 : 15

④ 9 : 25 : 24 ⑤ 15 : 25 : 21

해설

세 원 A, B, C 의 반지름의 길이가 각각 a, b, c 라고 하면

$$\begin{array}{rr} & a+b=8 \\ & b+c=13 \\ +) & c+a=11 \\ \hline & 2(a+b+c)=32 \end{array}$$

$\therefore a+b+c=16$ 이므로 $a=3$, $b=5$, $c=8$ 이다. 넓이의 비는 $3^2 : 5^2 : 8^2 = 9 : 25 : 64$

8. 4 % 의 소금물 x g 과 6 % 의 소금물을 섞은 후 물을 a g 더 부어 3 % 의 소금물 120 g 을 만들었다. 이때, $x : a = 1 : 3$ 이었다면 더 부은 물 a의 양은?

① 24 g ② 27 g ③ 18 g ④ 36 g ⑤ 54 g

해설

$$\begin{cases} 4\ \%\ \text{소금물} : x \\ 6\ \%\ \text{소금물} : y \\ \text{더 부은 물의 양} : 3x \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x + y + 3x = 120 \\ x \times \dfrac{4}{100} + y \times \dfrac{6}{100} = 120 \times \dfrac{3}{100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 120 & \cdots ① \\ 4x + 6y = 360 & \cdots ② \end{cases}$$

① – ② 을 하면 $x = 18,\ y = 48$ 이 된다.
따라서 더 부은 물의 양은 $3x$ 이므로 54 g 이다.

9. 금이 90% 포함된 A 와 금이 50% 포함된 B 를 섞어서 금이 75% 포함된 제품 400g 을 만들려고 할 때, A 의 양과 B 의 양은 각각 얼마인가?

① A = 300g, B = 100g　② A = 100g, B = 300g

③ A = 200g, B = 200g　④ A = 150g, B = 250g

⑤ A = 250g, B = 150g

해설

A 의 양을 xg , B 의 양을 yg 이라 하면

$$\begin{cases} x+y=400 \cdots ㉠ \\ x\times\dfrac{90}{100}+y\times\dfrac{50}{100}=400\times\dfrac{75}{100} \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡ × 10 을 하면 $9x+5y=3000 \cdots ㉢$

㉠ × 5 − ㉢ 을 하면 $-4x=-1000$

$\therefore x=250$

$x=250$ 을 ㉠에 대입하면 $y=150$

따라서, A 의 양은 250g, B 의 양은 150g 이다.

10. 배로 강을 9km 오르는 데 1 시간 30 분, 같은 장소로 다시 내려오는 데 30 분이 걸렸다. 이때, 정지하고 있는 물에서의 배의 속력과 강물의 흐르는 속력을 차례로 구하면?

① 8km/h, 4km/h
② 8km/h, 6km/h
③ 12km/h, 6km/h
④ 24km/h, 18km/h
⑤ 24km/h, 12km/h

해설

정지하고 있는 물에서의 배의 속력을 시속 $x$km, 강물의 흐르는 속력을 시속 $y$km 라 하면,
(시간) × (속력) = (거리) 이므로

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \times (x-y) = 9 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{2} \times (x+y) = 9 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

$㉠ \times \frac{2}{3} + ㉡ \times 2$ 를 계산하면, $x = 12,\ y = 6$
따라서 정지하고 있는 물에서의 배의 속력은 시속 12km, 강물의 흐르는 속력은 시속 6km

11. 둘레의 길이가 1km 인 원형 트랙을 A, B 두 사람이 같은 지점에서 서로 반대 방향으로 동시에 출발하면 2 분 후에 만나고, 같은 방향으로 출발하면 12 분 후에 만난다고 한다. 이 때, 두 사람의 속력을 구하면? (A 가 B 보다 빠르다고 한다.)

① $A : \frac{875}{3}$m/분, $B : \frac{635}{3}$m/분
② $A : \frac{865}{3}$m/분, $B : \frac{625}{3}$m/분
③ $A : \frac{875}{3}$m/분, $B : \frac{605}{3}$m/분
④ $A : \frac{865}{3}$m/분, $B : \frac{605}{3}$m/분
⑤ $A : \frac{875}{3}$m/분, $B : \frac{625}{3}$m/분

해설

A 의 속력을 xm/분 , B 의 속력을 ym/분라 하면
서로 반대방향으로 출발하여 서로 만났다는 것은 A, B 두 사람이 2 분 동안 걸은 거리의 합은 원형 트랙의 길이와 같다.
따라서 $2x + 2y = 1000$ 이다.
같은 방향으로 출발하여 12 분 후 다시 만났다고 하는 것은 A 가 걸은 거리와 B 가 걸은 거리의 차가 원형 트랙의 둘레의 길이와 같다.
따라서 $12x - 12y = 1000$ 이다.
두 식을 연립하여 풀면
$\therefore y = \frac{625}{3}$, $x = \frac{875}{3}$
$\therefore A : \frac{875}{3}$m/분, $B : \frac{625}{3}$m/분

12. 아들이 시속 20km 의 속력으로 자전거를 타고 집을 나선 지 5 분 후에 지갑을 놓고 간 것을 어머니가 자동차를 타고 시속 30km 로 달려서 아들을 만났다. 어머니는 출발한지 몇 분 후에 아들을 만났는가?

① 5 분 ② 6 분 ③ 8 분 ④ 10 분 ⑤ 12 분

해설

아들이 자전거를 타고 간 시간을 x분, 어머니가 자동차를 타고 간 시간을 y분이라 하면

두 사람이 움직인 거리는 같으므로

$20 \times \frac{x}{60} = 30 \times \frac{y}{60}$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, $x = \frac{3}{2}y$ $\cdots$①

아들이 어머니보다 5분 먼저 출발했으므로

$x = y + 5$ $\cdots$②

①식을 ②에 대입하면

$\frac{3}{2}y = y + 5$

$\frac{1}{2}y = 5$

$\therefore\ y = 10$(분)

13. 한이와 준이가 함께 방 청소를 하면 10 분 만에 끝낼 수 있다. 근데, 한이가 먼저 5 분 청소하고 나머지를 준이가 20 분 동안 청소해서 방 청소를 끝냈다. 준이가 혼자 방 청소를 하면 몇 분이 걸리겠는가?

① 30 분 ② 35 분 ③ 40 분 ④ 45 분 ⑤ 50 분

해설

전체 일의 양을 1, 한이와 준이가 1 분 동안 할 수 있는 일의 양을 각각 x, y 라 하면 $10x + 10y = 1$, $5x + 20y = 1$ 이다.

두 식을 연립하면 $x = \frac{1}{15}$, $y = \frac{1}{30}$ 이므로

준이가 혼자 방 청소를 하게 되면 30 분이 걸린다.

14. 어느 상점에서 지난 달 A 물건과 B 물건을 판 금액은 70 만원이고, 이 달에 판 금액은 A 가 4% , B 가 2% 늘어서 A, B 를 합하여 2 만원이 많아졌다고 한다. 이 달에 A 물건을 판 금액은?

① 312000 원 ② 335000 원 ③ 359000 원
④ 398000 원 ⑤ 408000 원

해설

지난 달 A 물건을 판 금액을 x원 , B 물건을 판 금액을 y원이라고 하면

$$\begin{cases} x+y=700000 \\ \frac{4}{100}x+\frac{2}{100}y=20000 \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} x+y=700000 \\ 2x+y=1000000 \end{cases}$$

$\therefore\ x=300000,\ y=400000$

따라서 이 달에 A 물건을 판 금액은

$300000+300000\times\frac{4}{100}=312000$(원) 이다.

15. 이탈리아의 어느 도시의 3 년 전 내국인과 외국인을 합한 총 인구는 3500000 명이었다. 그런데 그 후로 매년 내국인은 10% 씩 감소하고, 외국인은 매년 20% 씩 증가하여 금년에 외국인이 내국인보다 396900 명이 많았다. 이 때, 3 년 전의 외국인은 몇 명인가?(필요하면 $0.9^3 = 0.729$, $1.2^3 = 1.728$ 를 이용하시오.)

① 1180000 명 ② 1190000 명 ③ 1200000 명

④ 1210000 명 ⑤ 1220000 명

해설

내국인의 수를 x 명, 외국인의 수를 y 명

$x + y = 3500000$, $1.2^3 y - 0.9^3 x = 396900$

두 방정식을 연립하여 풀면 $y = 1200000$(명) 이다.