1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 를 만족하는 실수 해의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 1 개

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 9 = 0 & \cdots ㉠ \\ (x-y)^2 + y^2 = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x^2 - (y-3)^2 = 0$

$(x+y-3)(x-y+3) = 0$

$y = x+3$ 또는 $y = -x+3$

ⅰ) $y = -x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\therefore\ x = 2$이 때, $y = 1$

ⅱ) $y = x+3$을 ㉡에 대입하면,

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$\therefore\ x = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $y = 2 \pm \sqrt{3}i$

ⅰ), ⅱ)에서 실수해의 순서쌍은 $(2,\ 1)$이다.

따라서 실수해의 순서쌍의 개수는 1개이다.

2. 다음 부등식의 해집합을 S 라고 하면 $S = \{x \mid a < x \leq 6\}$ 이다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 8 < 5x + 4 \\ 3x + 4 \leq x - b \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$2x - 8 < 5x + 4$
$3x > -12$
$x > -4$
$\therefore\ a = -4$
$3x + 4 \leq x - b$
$2x \leq -4 - b$
$x \leq \dfrac{-4-b}{2}$
$\dfrac{-4-b}{2} = 6$
$-4 - b = 12$
$\therefore b = -16$
따라서 $ab = (-4) \times (-16) = 64$ 이다.

3. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+7<6x-11 \\ \dfrac{x+7}{3}>\dfrac{2x+3}{5} \end{cases}$ 을 만족하는 정수의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 21 개

해설

$2x-6x<-11-7$

$-4x<-18$

$x>\dfrac{9}{2}$

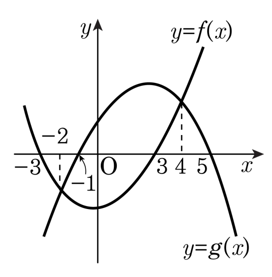
$5x+35>6x+9$

$x<26$

$\therefore\ \dfrac{9}{2}<x<26$

이므로 이를 만족하는 정수의 개수는 21 개이다.

4. 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)g(x)>0$의 해는?



① $x<-1$ 또는 $x>3$

② $x<-1$ 또는 $4<x<5$

③ $-3<x<-1$ 또는$3<x<5$

④ $-3<x<-2$ 또는 $4<x<5$

⑤ $-2<x<-1$ 또는 $3<x<5$

해설

$f(x)g(x)>0$ 에서 $f(x)>0,\ g(x)>0$ 또는 $f(x)<0,\ g(x)<0$

(i) $f(x)>0,\ g(x)>0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $3<x<5$

(ii) $f(x)<0,\ g(x)<0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $-3<x<-1$

따라서 (i), (ii) 에 의하여 구하는 부등식의 해는 $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

5. 점 $A(-1, 2)$, $B(2, -2)$ 에 대하여 다음 중 $\overline{PA} = \overline{AB}$ 를 만족시키는 점 P 의 좌표가 될 수 없는 것은?

① $(3, 5)$ ② $(-1, 7)$ ③ $(4, 2)$
④ $(2, 3)$ ⑤ $(-4, 6)$

해설

$\overline{AB}^2 = (2+1)^2 + (-2-2)^2 = 25$

① $P(3, 5)$ 일 때,

$\overline{PA}^2 = (-1-3)^2 + (2-5)^2 = 25$

② $P(-1, 7)$ 일 때,

$\overline{PA}^2 = (-1+1)^2 + (2-7)^2 = 25$

③ $P(4, 2)$ 일 때,

$\overline{PA}^2 = (-1-4)^2 + (2-2)^2 = 25$

④ $P(2, 3)$ 일 때,

$\overline{PA}^2 = (-1-2)^2 + (2-3)^2 = 10$

⑤ $P(-4, 6)$ 일 때,

$\overline{PA}^2 = (-1+4)^2 + (2-6)^2 = 25$

따라서 ④는 $\overline{PA} = \overline{AB}$ 를 만족시키지 않는다.

6. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 30 m

해설

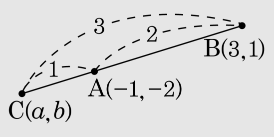
20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

7. 두 점 A$(-1,\ -2)$, B$(3,\ 1)$ 에 대하여 점 A 의 방향으로 그은 $\overline{AB}$ 의 연장선 위에 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$ 가 되게 하는 점 C 의 좌표를 구하면?

① C$\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$ ② C$\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$ ③ C$(-2,\ -3)$
④ C$\left(-3,\ -\frac{5}{2}\right)$ ⑤ C$\left(-3,\ -\frac{7}{2}\right)$

해설



$3\overline{AB}=2\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$ 이므로, 다음 그림에서 점 A 는 $\overline{CB}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점이다.
이 때, 점 C 의 좌표를 C$(a,\ b)$ 라 하면
A$\left(\frac{1\cdot 3+2a}{1+2},\ \frac{1\cdot 1+2b}{1+2}\right)$ 이므로
$\frac{3+2a}{3}=-1$ 에서 $a=-3$
$\frac{1+2b}{3}=-2$ 에서 $b=-\frac{7}{2}$
따라서 점 C 의 좌표는 C$\left(-3,\ -\frac{7}{2}\right)$ 이다.

8. 두 직선 $3x+4y=24$ 와 $3x+4y=4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

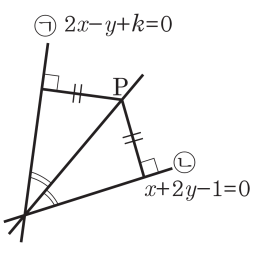
해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x+4y=24$ 의 점 $(0,6)$

$\frac{|0\times3+6\times4-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$

9. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① −2　　② 4　　③ −6
④ 8　　⑤ −10

해설

$2x-y+k=0 \ \cdots$ ㉠
$x+2y-1=0 \ \cdots$ ㉡
(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로
$\dfrac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k| = 4$
$\Rightarrow 5+k = \pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$
$\therefore k$ 의 합 : -10

10. 두 점 $(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나고, x 축에 접하는 원은 2개가 있다. 이 때, 두 원의 반지름의 합은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

x 축에 접하는 원의 방정식을 표현하면,
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
$(1,\ 4)$, $(3,\ 2)$ 를 지나므로 각각 대입하면,
$(1-a)^2+(4-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉠
$(3-a)^2+(2-b)^2=b^2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 를 연립하여 풀면,
$a=1, b=2$ 또는 $a=9,\ b=10$
$\therefore$ 두 원의 반지름의 합은 $10+2=12$

11. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 에 대하여 두 원이 외접할 때 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

외접하기 위한 조건은 $\sqrt{a^2+b^2}=2+1$

$\therefore a^2+b^2=9$

12. 직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 서로 만나지 않을 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

③ $-2 < m < 2$ ④ $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$

⑤ $-4 < m < 4$

해설

직선 $y = mx + 5$ 가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과
서로 만나지 않으므로, 원의 중심 $(0, 0)$ 에서
직선까지의 거리가 반지름의 길이 1보다 커야 한다.

$$\frac{5}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} > 1$$

$\therefore \sqrt{m^2 + 1} < 5$ 양변을 제곱하여 정리하면

$m^2 + 1 - 25 < 0, \quad m^2 - 24 < 0$

$(m - 2\sqrt{6})(m + 2\sqrt{6}) < 0$

$\therefore -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

13. 원 $x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 과 겹칠 때, a^2+b^2 의 값은?

① 25　　② 32　　③ 34　　④ 41　　⑤ 50

해설

$x^2+y^2+4x+6y+12=0$ 에서
$(x+2)^2+(y+3)^2=1 \cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=1 \cdots$ ㉡
㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$(x-a+2)^2+(y-b+3)^2=1$
이 원이 ㉡과 겹쳐지므로
$-a+2=-1$, $-b+3=-2$
$\therefore a=3$, $b=5$
$\therefore a^2+b^2=34$

14. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\sqrt{5}$　　④ 3　　⑤ $2\sqrt{5}$

해설

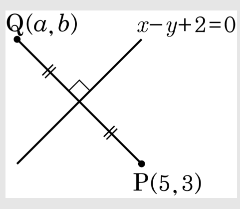
직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1,a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2$　　$\therefore a=1$

15. 직선 $x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=7$

해설



$x-y+2=0$ 에 관하여 점 $\mathrm{P}(5,\ 3)$ 과 대칭인 점을 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ 라면

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{a+5}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$ 이

직선 위에 있으므로 대입하면

$\dfrac{a+5}{2}-\dfrac{b+3}{2}+2=0$

$\rightarrow\ a-b+6=0\cdots$㉠

($\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기)$\times 1=-1$ 이므로

($\because\ \overline{\mathrm{PQ}}$ 와 직선이 수직)

$\dfrac{b-3}{a-5}\times 1=-1\ \rightarrow\ a+b-8=0\cdots$㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=1,\ b=7$

$\therefore\ ab=7$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$　③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$　⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8 에서 $x^2-11xy-26y^2=0,\ (x+2y)(x-13y)=0$
$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢
$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣
㉡, ㉢에서 $y^2=1$
$\therefore\ y=\pm1,\ x=\mp2$(복호동순)
㉡, ㉣에서 $16y^2=1$
$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)
$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

17. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots$ ㉠
이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.
$\frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$
$-y^2 + 6y - 9 \geq 0$, $y^2 - 6y + 9 \leq 0$
$(y-3)^2 \leq 0$ y 가 실수이므로 $y - 3 = 0$
$\therefore y = 3 \quad \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0$, $(x+1)^2 = 0$
$\therefore\ x = -1$
$\therefore\ x + y = -1 + 3 = 2$

18. 어느 학교 학생들이 운동장에서 야영을 하기 위해 텐트를 설치하였다. 한 텐트에 3 명씩 자면 12명이 남고, 5명씩 자면 텐트가 10개가 남는다고 할 때, 텐트의 수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▶ 답 : 개

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 31 개

▷ 정답 : 32 개

▷ 정답 : 33 개

해설

텐트 수를 x개, 학생 수를 $(3x+12)$ 명이라 하면

$5(x-11)+1 \le 3x+12 \le 5(x-11)+5$

$5(x-11)+1 \le 3x+12$에서

$5x-55+1 \le 3x+12$,

$2x \le 66$

$\therefore\ x \le 33$

$3x+12 \le 5(x-11)+5$에서

$3x+12 \le 5x-55+5$,

$2x \ge 62$

$\therefore\ x \ge 31$

$\therefore 31 \le x \le 33$

19. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.

② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.

⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$일 때

$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로

$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로

$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로

$a<\frac{1}{2}$일때, $2<x<\frac{1}{a}$,

$a>\frac{1}{2}$일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

20. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$

④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

해설

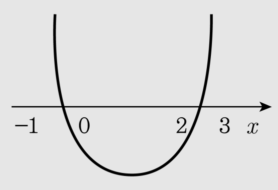
$n \le [x] < n+1$에서
$n-1 < [x-1] < n$이므로
$[x-1] = [x] - 1$
$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$
$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$
$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$
$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$
$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$
$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로
$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$
$\therefore 1 \le x < 5$

21. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<3$이 성립하도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a>0$)

① $\frac{2}{3}<a<1$　② $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$　③ $\frac{3}{2}<a<2$
④ $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}<a<3$

해설

$f(0)=-1<0$ 이므로 $y=ax^2-(a+1)x-1$의
그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1)=a+(a+1)-1>0$에서 $a>0$ ⋯ ㉠

$f(2)=4a-2(a+1)-1<0$에서 $a<\frac{3}{2}$ ⋯ ㉡

$f(3)=9a-3(a+1)-1>0$에서 $a>\frac{2}{3}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$

22. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
$ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

ⅰ) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 -2, 1 이므로
$a=-2$ 또는 1　$\therefore$ $a=1$ ($\because a>0$)

ⅱ) 세 직선이 한 점에서 만날 때
$2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1,\ 1)$
$ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
$a=-1$ (부적당)

ⅰ), ⅱ) 에서 $a=1$

23. 반지름의 길이가 각각 $3\,\mathrm{cm}$, $5\,\mathrm{cm}$ 이고, 중심거리가 $10\,\mathrm{cm}$ 인 두 원의 공통외접선의 길이와 공통내접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

① -60 ② -36 ③ 36 ④ 60 ⑤ 96

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{d^2-(r+r')^2}$ 이므로
$\sqrt{10^2-(5+3)^2} = \sqrt{36}$ 이고
공통외접선의 길이는 $\sqrt{d^2-(r-r')^2}$ 이므로
$\sqrt{10^2-(5-3)^2} = \sqrt{96}$ 이다.
그러므로 $x^2-y^2 = 96-36 = 60$ 이다.

24. A(3, −1)에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $x-2y-6=0, 2x+y-4=0$

② $x-2y-5=0, 2x+y-5=0$

③ $x-2y-4=0, 2x+y-5=0$

④ $x-2y-3=0, 2x+y-4=0$

⑤ $x-2y-2=0, 2x+y-3=0$

해설

점 A를 지나는 접선의 기울기를 m이라 하면, $y=m(x-3)-1$
접선이므로 원 중심에서 직선까지 거리는 반지름과 같다.

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\sqrt{5}$$

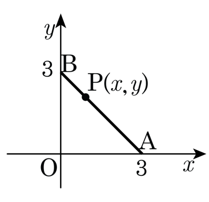
$$2m^2+3m-2=0$$

$$\therefore\ m=\frac{1}{2},\ -2$$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2},\ \ y=-2x+5$ 이므로

접선의 방정식은 $x-2y-5=0$ *or* $2x+y-5=0$

25. $b \geq a > 0,\ c \geq 0$ 이면 $\dfrac{a+c}{b+c} \geq \dfrac{a}{b}$ 가 성립한다. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$ 에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 가 선분 AB 위를 움직일 때, $\dfrac{5-y}{5+x} \times \dfrac{5-x}{5+y}$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

직선 AB 의 방정식은
$y = -x + 3$ 이므로 $x + y = 3$

$$\therefore\ \frac{5-y}{5+x} \times \frac{5-x}{5+y} = \frac{25-5(x+y)+xy}{25+5(x+y)+xy}$$
$$= \frac{10+xy}{40+xy} \geq \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$
$$(\because\ xy \geq 0)$$

(단, 등호는 $xy = 0$ 일 때,
점 P가 A 또는 B일 때 성립한다.)

따라서, 구하는 최솟값은 $\dfrac{1}{4}$ 이다.