1. 연립부등식 $-2 < 3x + 4 \leq 11$ 를 만족하는 정수를 모두 구하면?

① $-1, 0, 1$ ② $0, 1, 2$ ③ $-1, 0, 1, 2$

④ $-2, -1, 0, 1$ ⑤ $0, 1, 2, 3$

해설

$$\begin{cases} -2 < 3x + 4 \\ 3x + 4 \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \frac{7}{3} \end{cases}$$

따라서 $-2 < x \leq \frac{7}{3}$ 을 만족하는 정수는 : $-1, 0, 1, 2$ 이다.

2. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$

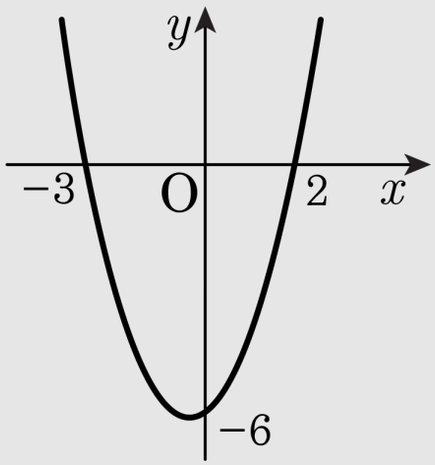
② $x < -2$ 또는 $x > 3$

③ $x < -1$ 또는 $x > 4$

④ $x < 0$ 또는 $x > 5$

⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

3. 두 점 A $(-2, 2)$, B $(5, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(1, 0)$ ② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ③ $(2, 0)$

④ $(3, 0)$ ⑤ $(4, 0)$

해설

x 축 위의 점을 P $(x, 0)$ 이라 하면, $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$(x+2)^2 + 2^2 = (x-5)^2 + 5^2 \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ P $(3, 0)$

4. 직선 $y = -2x + 4$ 에 평행하고, 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = \frac{1}{2}x + 1$ ② $y = -2x - \frac{1}{2}$ ③ $y = -2x - 2$

④ $y = -2x + 1$ ⑤ $y = 2x - 1$

해설

두 직선이 평행하므로 기울기가 같고 구하고자 하는 직선의 기울기는 -2

따라서 기울기가 -2 이고, 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y + 3 = -2(x - 2)$

$\therefore\ y = -2x + 1$

5. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

6. 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 옳게 짝지어진 것은?

① $y=\frac{1}{2}x^2+x-1 \Rightarrow x=-1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

② $y=-\frac{1}{2}x^2-x-2 \Rightarrow x=-1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{2}{3}$

③ $y=-3x^2+2x-1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{2}{3}$

④ $y=2x^2+12x \Rightarrow x=3$ 일 때, 최댓값 -3

⑤ $y=-x^2+5x-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{5}{4}$

해설

① $y=\frac{1}{2}x^2+x-1=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x=-1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{3}{2}$

② $y=-\frac{1}{2}x^2-x-2=-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x=-1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

④ $y=2x^2+12x=2(x+3)^2-18$

$\Rightarrow x=-3$ 일 때, 최솟값 -18

⑤ $y=-x^2+5x-5=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 5(x-9) < 4x-7 \\ 4x-7 \le 5(x-8) \end{cases}$ 을 만족하는 해집합 중에서 가장 작은 정수는?

① 33 ② 34 ③ 35 ④ 36 ⑤ 37

해설

$5x-45 < 4x-7$, $x < 38$

$4x-7 \le 5x-40$, $33 \le x$

$\therefore\ 33 \le x < 38$

8. 부등식 $|x-2| < k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k > 0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2 - 8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k > 0$이므로 부등식 $|x-2| < k$을 풀면

$-k < x - 2 < k$

$-k + 2 < x < k + 2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k + 2 \ge -4,\ k + 2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0 < k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

9. 두 점 A(1, 3) B(4, 0) 을 잇는 선분 AB 를 2 : 1 로내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q라 할 때 선분 PQ의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

내분점, 외분점을 구하는 공식을 이용한다.

$$\mathrm{P} = \left(\frac{2\times 4+1\times 1}{2+1}, \frac{2\times 0+1\times 3}{2+1}\right) = (3,1) \quad Q =$$

$$\left(\frac{2\times 4-1\times 1}{2-1}, \frac{2\times 0-1\times 3}{2-1}\right) = (7, -3)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$$

10. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$ ⑤ $(1, -5)$

해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{AD}$의 중점과 $\overline{BC}$의 중점은 일치한다.

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad a = 4 \, , \, b = 2$$

11. 두 직선 $y = 3x + 2$, $y = 4x - 1$ 의 교점을 지나는 직선 중 x 절편과 y 절편이 같은 직선을 구하면?

① $x + y - 14 = 0$ ② $-x + y - 14 = 0$

③ $x - y - 14 = 0$ ④ $x + y + 14 = 0$

⑤ $-x + y + 14 = 0$

해설

두 직선 $y = 3x + 2, y = 4x - 1$ 의
교점을 지나는 직선은
$(3x - y + 2) \cdot m + (4x - y - 1) = 0$
(m 은 상수) 로 나타낼 수 있다.
$\therefore (3m + 4)x - (m + 1)y + (2m - 1) = 0$
$\Leftrightarrow y = \dfrac{3m + 4}{m + 1}x + \dfrac{2m - 1}{m + 1}$
x 절편과 y 절편이 같으므로
이 직선의 기울기는 -1 이다.
따라서, $\dfrac{3m + 4}{m + 1} = -1$
$\therefore m = -\dfrac{5}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $x + y - 14 = 0$
(별해)
두 직선의 교점을 구하면 $3x + 2 = 4x - 1$ 에서
$x = 3,\ y = 11$
x 절편, y 절편이 같으면 기울기가 -1 이므로
$y - 11 = -1(x - 3)$
따라서, $y = -x + 14$

12. 다음은 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 대하여 기울기가 m 인 접선의 방정식을 구하는 과정이다.

원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인
접선의 방정식을 $y=mx+k$ 라 하자.
직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식
$x^2+y^2=r^2$ 에 대입하여 정리하면,
$(1+m^2)x^2+2mkx+$ (가) $=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로
$D=0$ 에서
$k=\pm$ (나)
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm$ (나)

(가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
② $r^2-k^2,\ r\sqrt{m^2-1}$
③ $k^2-r^2,\ \sqrt{m^2+1}$
④ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2+1}$
⑤ $k^2-r^2,\ r\sqrt{m^2-1}$

해설

직선 $y=mx+k$ 를 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$ 에
대입하면, $x^2+(mx+k)^2=r^2$
$(1+m^2)x^2+2mkx+k^2-r^2=0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면,
$\frac{D}{4}=m^2k^2-(1+m^2)(k^2-r^2)=m^2r^2+r^2-k^2$
원과 직선이 접하므로 $D=0$,
즉$r^2(m^2+1)=k^2,\ k=\pm r\sqrt{m^2+1}$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
$\therefore$ (가) : k^2-r^2, (나) : $r\sqrt{m^2+1}$

13. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

ㄱ $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

ㄴ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

ㄷ $(x^2+x+1)(x^2-x-1)=x^4+x+1$

ㄹ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

ㅁ $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄹ ⑤ ㅁ

해설

ㄷ $x+1=A$로 치환하여 전개하면

$(x^2+A)(x^2-A)=x^4-A^2=x^4-x^2-2x-1$

14. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$ ② $2x - y + 2$ ③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$ ⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$

$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

15. $\dfrac{2007^3-1}{2007\times 2008+1}$ 의 값은?

① 2004 ② 2005 ③ 2006 ④ 2007 ⑤ 2008

해설

$2007=a$로 놓고

주어진 식을 a에 대한 식으로 변형하면

$$\frac{a^3-1}{a(a+1)+1}=\frac{a^3-1}{a^2+a+1}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a^2+a+1}$$

$$=a-1=2007-1=2006$$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - 4k - 5 = 0$이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때, 상수 k의 값의 범위는 $a < k < b$이다. 이 때, $a + b$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{9}{4}$ ⑤ $-\frac{11}{4}$

해설

$x^2 - 2kx + k^2 - 4k - 5 = 0$이 서로 다른 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4} = k^2 - (k^2 - 4k - 5) = k^2 - k^2 + 4k + 5 > 0$

$\therefore k > -\frac{5}{4} \cdots ㉠$

두 근이 음수이므로

두 근의 합 $2k < 0$ $\therefore k < 0 \cdots ㉡$

두 근의 곱은

$k^2 - 4k - 5 > 0$에서 $(k+1)(k-5) > 0$

$\therefore k < -1,\ k > 5 \cdots ㉢$

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$-\frac{5}{4} < k < -1$

$\therefore a = -\frac{5}{4},\ b = -1$

$a + b = -\frac{5}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$

17. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 한근이 $2 - \sqrt{3}$일 때, $\dfrac{c-b}{a}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2 - \sqrt{3}$이 근이면 $2 + \sqrt{3}$도 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $-\dfrac{b}{a} = \left(2 + \sqrt{3}\right) + \left(2 - \sqrt{3}\right) = 4$

$\dfrac{c}{a} = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$

$\therefore \dfrac{c-b}{a} = \dfrac{c}{a} + \left(-\dfrac{b}{a}\right) = 1 + 4 = 5$

18. 연립부등식 $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{2}{5} > x-0.6 \\ 2-\frac{x+2}{3} < \frac{x-4}{9} \end{cases}$ 의 해는?

① $x<3$ ② $x>3$ ③ $x>4$

④ $3<x<4$ ⑤ 해가 없다.

해설

(i) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{5} > x-0.6$ 에서 $20x+12 > 30x-18$

$\therefore\ x<3$

(ii) $2-\frac{x+2}{3} < \frac{x-4}{9}$ 에서 $18-3x-6 < x-4$

$\therefore\ x>4$

연립방정식의 해는 $x<3$, $x>4$ 이므로 해가 없다.

19. 두 점 $\mathrm{A}(-2,-3)$, $\mathrm{B}(-5,4)$ 에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0,-2)$ ② $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ③ $(0,1)$

④ $(0,2)$ ⑤ $\left(0,\frac{14}{3}\right)$

해설

P의 좌표를 $(0,\alpha)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{(0-(-2))^2+(\alpha-(-3))^2}$

$=\sqrt{(0-(-5))^2+(\alpha-4)^2}$, $\alpha=2$

$\therefore\ \mathrm{P}=(0,2)$

20. 점 $(0, 2)$를 지나고, 원 $x^2 + y^2 = 1$에 접하는 직선 중 기울기가 양수인 직선의 기울기는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0, 2)$를
지나는 접선은 $y = mx + 2$
원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $y = mx + 2$까지의
거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

즉, $\dfrac{2}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$

$\therefore m = \sqrt{3}\ (\because m > 0\ )$