

1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$x^4 = 16$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서
 $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$
 $\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$
 $\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

2. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
- ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
- ③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
- ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
- ⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	-4	3
	1	1	1	-3	
1	1	1	1	-3	0
	1	2	3		
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0, x=1, -1 \pm \sqrt{2}i$

3. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

5. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 의 모든 실근의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 + 3t - 10 = 0, (t + 5)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -5$ 또는 $t = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
 $\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

6. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

7. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x - 2)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x - 3)(x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \frac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

8. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (a+1)x^2 + 2ax + a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 양수 a 의 값과 그 때의 중근 α 의 값의 합 $a + \alpha$ 의 값을 구하면?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법을 이용한다 $f(-1) = 0$ 이므로

-1	1	$a+1$	$2a$	a
		-1	$-a$	$-a$
	1	a	a	0

$\Rightarrow (x+1)(x^2+ax+a) = 0$
 $x^2+ax+a = 0$ 에 $x = -1$ 을 대입하면 0이 아니므로
 x^2+ax+a 가 중근을 갖는다.
중근일 조건 : 판별식 = 0
 $\therefore a^2 - 4a = 0$
 $a(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0$ 또는 $a = 4$
 $\therefore$ 양수 $a = 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0(x+2)^2 = 0$
 $\Rightarrow$ 중근 $\alpha = -2 \Rightarrow a + \alpha = 2$

9. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$ 의 근 중에서 무리수인 두 근을 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -6

② -2

③ 2

④ 4

⑤ 8

해설

방정식을 인수분해하면 $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$(x - 3)(x^2 - 4x - 3) = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근이 a, b ($\because$ 무리수)

$a + b = 4$

10. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1

1

-2

1

0

-4

-1

3

-4

4

2

1

-3

4

-4

0

2

-2

4

1

-1

2

0

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$

따라서 두 허근은 $x^2-x+2=0$ 의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=1$

11. 사차방정식 $x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

-1

1 1 -1 -7 -6

-1 0 1 6

2

1 0 -1 -6 0

2 4 6

1 2 3 0

$(x + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근이 허근이므로

$(D < 0)\alpha + \beta = -2$

12. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = -2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 으로 놓으면
 $f(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ 이므로, 조립제법에 의하면

1		1	-2	-5	6
			1	-1	-6
		1	-1	-6	0

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

13. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을
인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

1		1	-6	11	-6
			1	-5	6
		1	-4	5	0

$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

14. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$ 의 모든 근의 합은?

- ① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$

15. 방정식 $x(x+2)(x+4)(x+6)+15=0$ 을 풀면?

- ① $x = -2$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{3}$
- ② $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = -3$ 또는 $x = -5$
- ③ $x = -2 \pm \sqrt{5}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{6}$
- ④ $x = -3 \pm \sqrt{5}i$ 또는 $x = -2 \pm \sqrt{6}i$
- ⑤ $x = -1$ 또는 $x = -5$ 또는 $-3 \pm \sqrt{6}$

해설

$x(x+6) = x^2 + 6x$
 $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$
 $x^2 + 6x = X$ 로 놓으면
 $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$
 $X(X+8) + 15 = 0,$
 $X^2 + 8X + 15 = 0$
 $(X+3)(X+5) = 0$
 $\therefore X = -3, X = -5$
 $\textcircled{+} : X = -3 \Rightarrow x^2 + 6x + 3 = 0,$
 $x = -3 \pm \sqrt{9-3} = -3 \pm \sqrt{6}$
 $\textcircled{-} : X = -5 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0,$
 $(x+5)(x+1) = 0, x = -1, -5$

16. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

② $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③ $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤ $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

17. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

- ① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1 + i$ ⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$
 $\therefore x = 8$ 또는 $X = -2$
(i) $X = 8$ 일 때 $x^2 - 2x = 8$ 에서 $(x - 4)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
(ii) $X = -2$ 일 때 $x^2 - 2x = -2$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

18. 다음 방정식의 해가 아닌 것은?

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$

- ① -3
- ② -2
- ③ -1
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$ 에서 $x^2 + x = X$ 라 하면
 $X^2 - 8X + 12 = 0, (X - 2)(X - 6) = 0$
 $\therefore X = 2$ 또는 $X = 6$
(i) $X = 2$ 일 때, $x^2 + x = 2$ 에서
 $x^2 + x - 2 = 0,$
 $(x - 1)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = -2$
(ii) $X = 6$ 일 때, $x^2 + x = 6$ 에서
 $x^2 + x - 6 = 0,$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는
 $x = -3$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서, 해가 아닌 것은 ③

19. 방정식 $(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$ 의 모든 실근의 합은?

① -10

② -2

③ -1

④ 2

⑤ 10

해설

$(x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 10 = 0$ 에서

$x^2 + x = A$ 라 하면

$A^2 + 2A - 8 = 0,$

$(A + 4)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -4$ 또는 $A = 2$

(i) $x^2 + x = -4$ 일 때,

$x^2 + x + 4 = 0$

$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

(ii) $x^2 + x = 2$ 일 때,

$x^2 + x - 2 = 0,$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$

(i), (ii)에서 실근은 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 이므로 실근의 합은

$-2 + 1 = -1$

20. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

21. 방정식 $(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(x^2 + x + 2)^2 = x^2 + x + 4$ 에서

$x^2 + x + 2 = A$ 라 하면

$A^2 = A + 2,$

$A^2 - A - 2 = 0, (A + 1)(A - 2) = 0$

$\therefore A = -1$ 또는 $A = 2$

(i) $x^2 + x + 2 = -1$ 일 때, $x^2 + x + 3 = 0$

(ii) $x^2 + x + 2 = 2$ 일 때, $x^2 + x = 0$

(i), (ii)에서 α, β 는 허근이므로 $x^2 + x + 3 = 0$ 의 근이 된다.

따라서, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$

22. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ 을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$ 꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

- ① $1 \pm \sqrt{3}i$
- ② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- ③ $-1 \pm \sqrt{3}i$
- ④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- ⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & (x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 \\ &= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2 \end{aligned}$$

이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로

$$2 = 2a - 4, 4 = -4b, 8 = a^2 - b^2$$
$$\therefore a = 3, b = -1$$

따라서 주어진 4차방정식은

다음과 같이 변형하면,

$$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$$
$$\therefore (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$$
$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}i \text{ 또는 } x = -1 \pm i$$

23. 사차방정식 $2x^4 + 7x^2 - 4 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값은?

- ① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$$2x^4 + 7x^2 - 4 = 0 \text{에서 } x^2 = t \text{라 하면}$$

$$2t^2 + 7t - 4 = 0, (2t - 1)(t + 4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = -4$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } x = \pm 2i$$

이 때, α, β 는 허근이므로

$$\alpha = 2i, \beta = -2i \text{ 또는 } \alpha = -2i, \beta = 2i$$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = -1$$

24. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $x^2 = 3$ 일 때, $x = \pm \sqrt{3}$
(ii) $x^2 = -1$ 일 때, $x = \pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

25. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$ 을 변형하면

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$