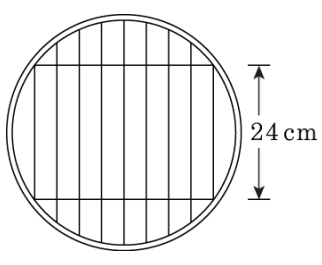
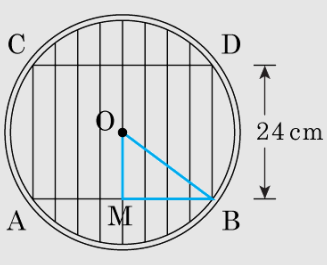
1. 경식이는 가족여행을 가서 다음 그림과 같은 원 모양의 석쇠로 고기를 구웠다. 굵은 두 철사는 평행하고 길이가 32 cm 로 같았으며, 두 철사 사이의 간격은 24 cm 였다. 경식이가 사용한 석쇠의 반지름의 길이는?



① 20 cm ② 25 cm ③ 30 cm
④ 40 cm ⑤ 45 cm

해설

두 철사가 원 모양의 석쇠와 만나는 네 개의 점을 각각 A, B, C, D 라 하고, 석쇠의 중심을 O, $\overline{AB}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{OM} = 12\,\text{cm}$, $\overline{MB} = \overline{AB} \times \frac{1}{2} = 32 \times \frac{1}{2} = 16\,(\text{cm})$ 이다.



석쇠의 반지름의 길이는 $\triangle OMB$ 가 직각삼각형이므로 $\overline{OB} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20\,(\text{cm})$ 이다.

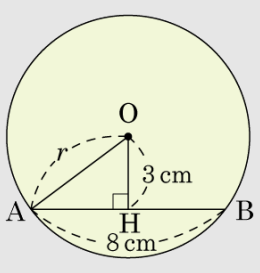
2. 원의 중심에서 3 cm 떨어져 있는 현의 길이가 8cm 일 때, 이 원의 넓이는?

① $25\pi\,\mathrm{cm}^2$ ② $28\pi\,\mathrm{cm}^2$ ③ $32\pi\,\mathrm{cm}^2$

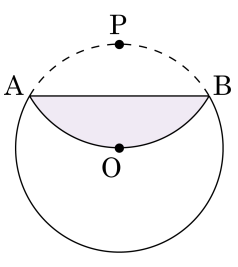
④ $36\pi\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $38\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

그림에서 $\overline{\mathrm{AH}} = 4(\mathrm{cm})$ 이므로 $r = \sqrt{3^2+4^2} = 5(\mathrm{cm})$
따라서, 원 O 의 넓이는 $\pi \times 5^2 = 25\pi(\mathrm{cm}^2)$



3. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 8 cm 인 원 위의 점 P 를 중심 O 에 닿도록 접었을 때 생기는 현 AB 의 길이는?

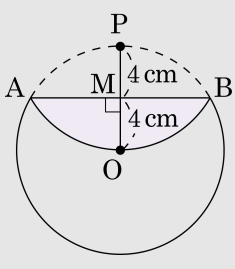


① $5\sqrt{3}$ cm ② $6\sqrt{3}$ cm

③ $7\sqrt{3}$ cm ④ $8\sqrt{3}$ cm

⑤ $9\sqrt{3}$ cm

해설



$\overline{OP}$ 와 $\overline{AB}$ 가 만나는 점을 M 이라 하면 $\overline{AB} \perp \overline{OM}, \overline{OM} = \overline{PM} = 4(\text{cm})$ 이다.

$\overline{AM} = \overline{BM}$

$= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2}$

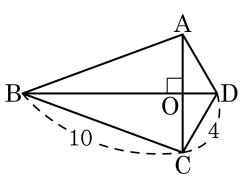
$= \sqrt{8^2 - 4^2}$

$= \sqrt{64 - 16}$

$= \sqrt{48} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$ 이다.

따라서 $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 8\sqrt{3}(\text{cm})$ 이다.

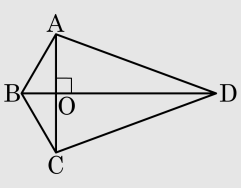
4. 다음 그림의 □ABCD 에서 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 일 때, $\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ 의 값은?



① 6 ② 36 ③ 54

④ 64 ⑤ 84

해설

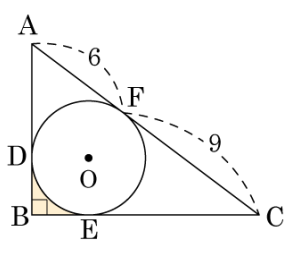


대각선이 직교하는 사각형에서는 다음 관계가 성립한다. $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2$

$\therefore \overline{AB}^2 + 4^2 = 10^2 + \overline{AD}^2$

$\therefore \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = 100 - 16 = 84$

5. 다음 그림에서 원 O 는 직각삼각형 ABC 의 내접원이고, 점 D, E, F 는 접점이다. 이 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① $10-\frac{9}{4}\pi$ ② $9-\pi$ ③ $\frac{44}{9}-\pi$

④ $9-\frac{9}{4}\pi$ ⑤ $20-5\pi$

해설

원 O 의 반지름을 x 라 하면 $\overline{BD}=\overline{BE}=x$

$\overline{AD}=\overline{AF}=6$ 이므로 $\overline{AB}=6+x$,

$\overline{CE}=\overline{CF}=9$ 이므로 $\overline{BC}=9+x$

$(6+x)^2+(x+9)^2=15^2$

$x^2+15x-54=0$

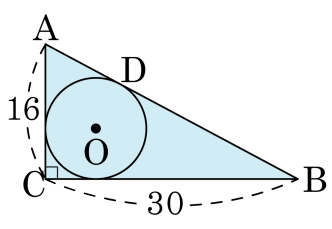
$(x+18)(x-3)=0$

$\therefore\ x=3$

색칠한 부분의 넓이는 정사각형 ODBE 에서 부채꼴 ODE 의 넓이를 뺀 것과 같다.

$\therefore 3^2-\frac{1}{4}\times 3^2\times\pi=9-\frac{9}{4}\pi$

6. 다음 그림에서 원 O 는 직각삼각형 ABC 의 내접원이다. 원 O 의 반지름의 길이는?

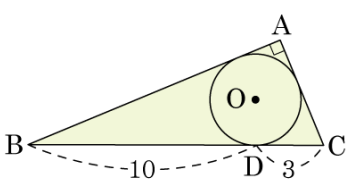


① 6 ② $6\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 8

해설

원 O 의 반지름을 r 이라 하면 $\overline{CE} = \overline{CF} = r$,
$\overline{AD} = 16 - r$,$\overline{BD} = 30 - r$
$\overline{AB} = \sqrt{30^2 + 16^2} = 34$
$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD}$
$34 = (16 - r) + (30 - r) \quad \therefore r = 6$

7. 다음 그림에서 원 O 는 직각삼각형 ABC 의 내접원이다. △ABC 의 넓이는? (단, $\overline{BD}=10$, $\overline{CD}=3$)

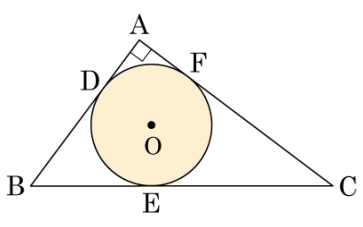


① 12 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 48

해설

원 O 의 반지름의 길이를 r 라 하면
$\overline{AB}=10+r$, $\overline{AC}=3+r$ 이고
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ 이므로
$13^2=(10+r)^2+(3+r)^2$
$169=100+20r+r^2+9+6r+r^2$
$2r^2+26r-60=0$
$r^2+13r-30=0$
$(r+15)(r-2)=0$
$r>0$ 이므로 $r=2$
$\therefore \overline{AB}=12,\ \overline{AC}=5$
$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times12\times5=30$

8. 다음 그림에서 원 O 는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ABC 의 내접원이고, 점 D, E, F 는 접점이다. $\overline{AB} = 12\text{cm}$, $\overline{BC} = 20\text{cm}$, $\overline{CA} = 16\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이는?



① $4\pi\,\text{cm}^2$ ② $\frac{9}{2}\pi\,\text{cm}^2$ ③ $6.5\pi\,\text{cm}^2$

④ $12\pi\,\text{cm}^2$ ⑤ $16\pi\,\text{cm}^2$

해설

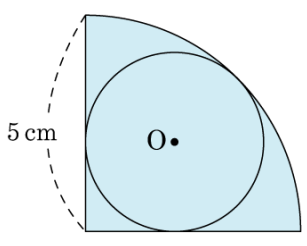
내접원의 반지름을 r 라 하면

$\frac{1}{2} \times 12 \times 16 = \frac{1}{2} \times (12 + 16 + 20) \times r$

$\therefore r = 4(\text{cm})$

따라서, 원의 넓이는 $16\pi\text{cm}^2$

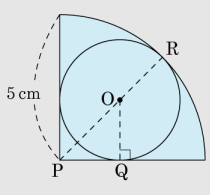
9. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5cm 인 사분원에 내접하는 원 O 가 있다. 원 O 의 반지름의 길이는?



① $(5\sqrt{2}-5)$cm ② $(4\sqrt{2}-5)$cm ③ $(3\sqrt{2}-5)$cm
④ $(2\sqrt{2}-5)$cm ⑤ $(\sqrt{2}-5)$cm

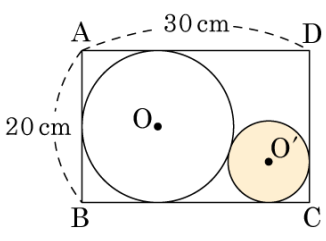
해설

원 O 의 반지름을 $x$cm 라 한다.
그림과 같이 보조선을 그으면



$\overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR}$
$\sqrt{2}x + x = 5$
$(\sqrt{2}+1)x = 5$
$x = 5(\sqrt{2}-1)$

10. 다음 그림에서 원 O 는 직사각형 ABCD 에 내접하는 큰 원이고 원 O′ 은 그 나머지 부분에 내접하는 작은 원이다. 원 O′ 의 넓이는?

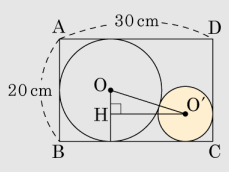


① $400(10-17\sqrt{3})\text{cm}^2$ ② $400(7-4\sqrt{3})\text{cm}^2$

③ $420(10-19\sqrt{3})\text{cm}^2$ ④ $400(100-20\sqrt{3})\text{cm}^2$

⑤ $410(10-21\sqrt{3})\text{cm}^2$

해설



그림과 같이 보조선을 그어 $\triangle O'OH$ 에서

$\overline{OO'} = 10 + x$

$\overline{OH} = 10 - x$

$\overline{O'H} = 20 - x$

$\overline{OO'}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{O'H}^2$ 에서

$(10+x)^2 = (10-x)^2 + (20-x)^2$

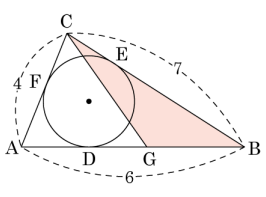
$x^2 - 80x + 400 = 0$

$x = 40 \pm 20\sqrt{3}$

x 는 30 보다 작으므로 $x = (40 - 20\sqrt{3})$ cm 이다.

$\therefore$ (원 O′ 의 넓이)$= \pi(40-20\sqrt{3})^2 = 400(7-4\sqrt{3})(\text{cm}^2)$

11. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고 점 D, E, F 는 접점이다. $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AC}=4$ 이고 $\overline{DG}:\overline{GB}=2:3$ 일 때, $\triangle GBC$ 의 넓이는?



① $\frac{9\sqrt{255}}{40}$ ② $\frac{9\sqrt{255}}{80}$ ③ $\frac{27\sqrt{255}}{40}$
④ $\frac{27\sqrt{255}}{80}$ ⑤ $\frac{27\sqrt{5}}{8}$

해설

$\overline{AD}=a$ 라 하면 $\overline{AD}=\overline{AF}=a$, $\overline{BD}=\overline{BE}=6-a$, $\overline{CE}=\overline{CF}=4-a$

$\overline{BC}=(6-a)+(4-a)=7$ 이므로

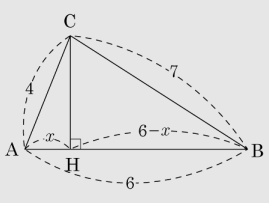
$a=\overline{AD}=\frac{3}{2}$, $\overline{BD}=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

$\overline{AD}:\overline{BD}=\frac{3}{2}:\frac{9}{2}=1:3$ 이므로 $\triangle DBC=\frac{3}{4}\triangle ABC$ 이고

$\overline{DG}:\overline{GB}=2:3$ 이므로 $\triangle GBC=\frac{3}{5}\triangle DBC$

$\therefore \triangle GBC=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\triangle ABC=\frac{9}{20}\triangle ABC$

다음 그림에서 $\overline{AH}=x$ 라 하면 $\overline{BH}=6-x$



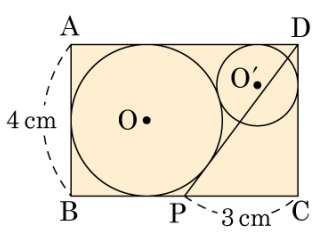
$\overline{CH^2}=4^2-x^2=7^2-(6-x)^2 \therefore\ x=\frac{1}{4}$

$\triangle AHC$ 에서 $\overline{CH}=\sqrt{4^2-(\frac{1}{4})^2}=\sqrt{16-\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{255}{16}}=\frac{\sqrt{255}}{4}$

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{255}}{4}=\frac{3}{4}\sqrt{255}$

$\therefore \triangle GBC=\frac{9}{20}\triangle ABC=\frac{9}{20}\times\frac{3}{4}\sqrt{255}=\frac{27}{80}\sqrt{255}$

12. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 직사각형이고, $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{PC} = 3\text{cm}$ 이다. 사각형 ABPD 가 원 O 에 외접하고 원 O′ 은 원 O 에 접하고, 변 AD, CD 에 접한다. 원 O′ 의 반지름은?



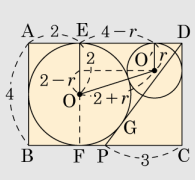
① $(8+4\sqrt{3})\,\text{cm}$ ② $(8-4\sqrt{3})\,\text{cm}$ ③ $(4+2\sqrt{3})\,\text{cm}$
④ $(4-2\sqrt{3})\,\text{cm}$ ⑤ $1\,\text{cm}$

해설

$\overline{FP} = \overline{GP} = x\text{cm}$ 라 하자.
△DPC 에서

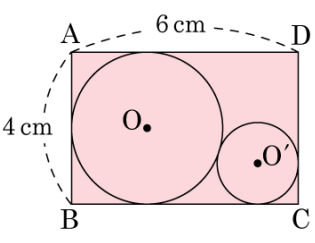
$$\overline{DP} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{PC}^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$
$$= 5(\text{cm})$$

$\overline{DG} = 5 - x(\text{cm})$
또 $\overline{ED} = \overline{FC} = \overline{FP} + \overline{PC} = x + 3(\text{cm})$
$\overline{ED} = \overline{DG}$ 이므로 $x + 3 = 5 - x$, $x = 1$
$\therefore \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = 2 + 4 = 6\ (\text{cm})$



원 O′ 의 반지름을 $r\text{cm}$ 라 하면
$(2+r)^2 = (2-r)^2 + (4-r)^2$
$r^2 - 16r + 16 = 0$
$\therefore r = 8 - 4\sqrt{3} (\because 0 < r < 2)$

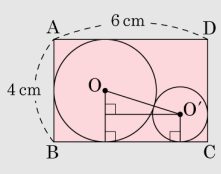
13. 가로 세로 길이가 6cm, 4cm 인 직사각형에서 가능한 한 큰 원을 오려내고, 남은 부분에서 또 가능한 한 큰 원을 오려낼 때 두 번째 원의 반지름의 길이는?



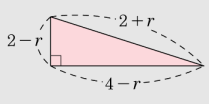
① $(6-4\sqrt{3})$cm ② $(4-4\sqrt{3})$cm ③ $(8-4\sqrt{3})$cm

④ $(6-\sqrt{3})$cm ⑤ $(8-\sqrt{3})$cm

해설



작은 원의 반지름을 r cm 라고 하면 큰 원의 반지름은 2cm 이므로



$(2-r)^2+(4-r)^2=(2+r)^2$

$\therefore r=8-4\sqrt{3}(\because 0<r<2)$