

1. $(x-2y) : (2x+y) = 2 : 3$ 일 때, $\frac{3x+6y}{x-y}$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$

② $\frac{4}{5}$

③ 1

④ $\frac{7}{6}$

⑤ 2

해설

$(x-2y) : (2x+y) = 2 : 3$ 을 풀면

$$3(x-2y) = 2(2x+y), 3x-6y = 4x+2y$$

$$-x = 8y$$

$x = -8y$ 이므로

주어진 식에 대입하면

$$\frac{3 \times (-8y) + 6y}{-8y - y} = \frac{-18y}{-9y} = 2$$

2. 자연수 n 에 대하여, 다음 식을 계산하면 얼마인가?

$$1^{2n} + (-1)^{2n} + 1^{4n} + (-1)^{4n} + 1^{6n} + (-1)^{6n}$$

① -6

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 6

해설

$1^n = 1$, $(-1)^{2n} = \{(-1)^2\}^n = 1^n = 1$ 이므로,

$1^{2n} + (-1)^{2n} + 1^{4n} + (-1)^{4n} + 1^{6n} + (-1)^{6n} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
이다.

3. $2^{10} \approx 1000$ 이라 할 때, 5^{10} 의 값은?

① 10^2

② 10^4

③ 10^5

④ 10^7

⑤ 10^8

해설

$$2^{10} \approx 10^3 = 2^3 \times 5^3 \text{ 이므로}$$

$$5^3 \approx 2^{10} \div 2^3 = 2^7$$

$$\text{따라서 } 5^{10} = 5^3 \times 5^7 \approx 2^7 \times 5^7 = 10^7$$

4. 다음 식에서 P 의 값은? (단, $a \neq b \neq c$)

$$P = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{-a}{(a-b)(c-a)} + \frac{-b}{(b-c)(a-b)} + \frac{-c}{(c-a)(b-c)} \\ &= \frac{-a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-ab + ac - bc + ab - ac + bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \end{aligned}$$

5. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3$ 일 때, $\frac{a + 3ab + b}{a - ab + b}$ 의 값은?

① -3

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3, \frac{a+b}{ab} = 3$$

$$\therefore 3ab = a + b$$

$$\begin{aligned} \frac{a + 3ab + b}{a - ab + b} &= \frac{3ab + 3ab}{3ab - ab} \\ &= \frac{6ab}{2ab} \\ &= 3 \end{aligned}$$

6. 분수 $\frac{A}{30}$ 를 소수로 고치면 유한소수이고, 이 분수를 기약분수로 고치면 $\frac{1}{B}$ 이다. $10 < A < 20$ 일 때, B 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

기약분수로 나타냈을 때 분모에 2, 5 이외의 소인수가 있으면 안되므로 우선 30 을 소인수분해한다. $30 = 2 \times 3 \times 5$ 이므로 우선 A 는 3 의 배수이어야 한다. 그리고 기약분수로 나타냈을 때 $\frac{1}{B}$ 이 되어야 하므로 A 는 $2 \times 3 \times 5$ 의 약수이어야 한다.

$10 < A < 20$ 범위에 있는 3 의 배수는 12, 15, 18 인데 이중에 $2 \times 3 \times 5$ 의 약수는 15 밖에 없다. 그러므로 $A = 15$ 이다.

$$\frac{15}{30} = \frac{1}{2} = \frac{1}{B}$$

$$\therefore B = 2$$

7. 자연수 n 에 대하여 a_n 을 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 의 일의 자리의 숫자라고 정의할 때, 소수 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 의 순환마디의 숫자의 갯수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 \text{의 일의 자리의 숫자}) = 5$

$(11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 20^2 \text{의 일의 자리의 숫자}) = 5$

따라서,

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 \text{의 일의 자리의 숫자}) = 0$ 이 되어

$n = 21$ 이후로는 $1^2, 1^2 + 2^2, \cdots$ 의 일의 자리의 숫자가 다시 반복된다.

즉, $a_{21} = a_1, a_{22} = a_2, a_{23} = a_3, \cdots$ 이므로 소수

$0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 는 순환소수이고

순환마디는 $a_1a_2a_3\cdots a_{20}$ 의 20 개의 숫자이다.

8. $\frac{4}{27}$ 를 소수로 나타내었을 때, x_n 은 소수점 아래 n 번째 수를 나타낸다.
다음 값을 구하여라.

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 + \cdots + x_{41}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 91

해설

$$\frac{4}{27} = 0.\dot{1}4\dot{8}, x_1 = 1, x_3 = 8, x_5 = 4, \cdots x_7 = 1, \cdots$$

$$\therefore (\text{준식}) = 7 \times (1 + 8 + 4) = 91$$

9. $243^5 \div 81^n = 27^3$ 일 때, n 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(3^5)^5 \div 3^{4n} = 3^{25-4n} = 3^9$$

$$25 - 4n = 9$$

$$\therefore n = 4$$

10. $\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{3}{45}, \dots, \frac{199}{45}, \frac{200}{45}$ 중에서 유한소수이면서, 정수가 아닌
유리수의 개수는?

① 4개

② 18개

③ 22개

④ 62개

⑤ 66개

해설

$\frac{n}{45} = \frac{n}{3^2 \times 5}$ 이 유한소수가 되게 하는 n 은 9의 배수이므로 22개, 이때 정수가 되게 하는 n 은 45의 배수로 4개이다.
따라서 $22 - 4 = 18$ 개이다.

11. 유리수 $\frac{a}{70}$ 를 정수가 아닌 유한소수가 되도록 하는 자연수 a 의 갯수를 A 라 하고, $\frac{18}{3 \times 5 \times b}$ 을 무한소수가 되도록 하는 자연수 b 의 개수를 B 라 할 때, $A - B$ 의 값을 구하여라. (단, $1 \leq a \leq 100$, $1 \leq b \leq 10$)

▶ 답:

▷ 정답: $A - B = 11$

해설

$\frac{a}{70} = \frac{a}{2 \times 5 \times 7}$ 가 유한소수이기 위해서는

a 는 70을 제외한 7의 배수이므로 $A = 13$

$\frac{18}{3 \times 5 \times b} = \frac{2 \times 3}{5 \times b}$ 가 무한소수이므로 $b = 7, 9$ 이다. $B = 2$

$\therefore A - B = 11$

12. $\frac{14a}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되기 위한 a 의 개수는?
(단, $a \leq 100$, a 는 자연수)

- ① 30 개 ② 31 개 ③ 32 개 ④ 33 개 ⑤ 34 개

해설

$\frac{14a}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7} = \frac{a}{2^2 \times 3 \times 5^2}$ 가 유한소수이므로 a 는 100 이하의 3의 배수이다.

13. k 는 200 이하의 자연수일 때, $\frac{k}{55}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 15 개

해설

$\frac{k}{11 \times 5}$ 는 유한소수이므로 k 는 11 의 배수이다.

따라서 k 의 개수는 $18 - 3(55\text{의 배수}) = 15$ (개)

14. 유리수 $\frac{n}{42}$ 을 유한소수가 되게 하는 n 의 개수를 구하여라. (단, $1 \leq n \leq 200$ 인 정수)

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 9개

해설

$$\frac{n}{42} = \frac{n}{2 \times 3 \times 7}$$

따라서 n 은 $3 \times 7 = 21$ 의 배수이다.

$200 \div 21 = 9.52 \dots$ 이므로 n 의 개수는 9개 이다.

15. $\frac{9 \times 6^n}{4}$ 의 약수의 개수가 77 개일 때, 자연수 n 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 소인수분해하여 간단히 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{9 \times 6^n}{4} &= \frac{3^2 \times (2 \times 3)^n}{2^2} \\ &= 2^{-2} \times 2^n \times 3^2 \times 3^n \\ &= 2^{n-2} \times 3^{n+2}\end{aligned}$$

따라서 약수의 개수는

$$(n - 2 + 1)(n + 2 + 1) = (n - 1)(n + 3) = 77 \text{ 이므로}$$

$$n - 1 = 7, n + 3 = 11$$

$$\therefore n = 8$$

16. $64 \times 125 \times 256 \times 625$ 는 $n + 1$ 자리 자연수이다. 이 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} 64 \times 125 \times 256 \times 625 &= 2^6 \times 5^3 \times 2^8 \times 5^4 \\ &= 2^7 \times (2 \times 5)^7 \\ &= 2^7 \times 10^7 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식은 $64 \times 125 \times 256 \times 625 = 128 \times 10^7$ 이므로 10 자리의 자연수이다.

$$\therefore n = 9$$

17. 자연수 n 에 대하여 $30^n = x$ 일 때, $(2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n$ 을 x 에 관한 가장 간단한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $30x$

해설

$$\begin{aligned} & (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n + 2^n 2^1 3^n + 2^n 3^n 3^2 + 2^n 2^1 3^n 3^2) \times 5^n \\ &= (2^n 3^n 5^n) + 2 \times (2^n 3^n 5^n) + 9 \times (2^n 3^n 5^n) \\ &\quad + 18 \times (2^n 3^n 5^n) \end{aligned}$$

$$2^n 3^n 5^n = 30^n = x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2^n + 2^{n+1}) \times (3^n + 3^{n+2}) \times 5^n \\ = x + 2x + 9x + 18x = 30x \end{aligned}$$

18. $x = \frac{n}{150}$ (n 은 100 이하의 자연수) 일 때, x 가 무한소수가 되도록 하는 n 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 67

해설

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

n 이 3 의 배수이면 $\frac{n}{150}$ 은 유한소수

$$100 \div 3 = 33 \cdots 1$$

$$\therefore 100 - 33 = 67$$

19. $80 \leq a \leq 90$ 인 조건에서 $\frac{a}{180}$ 는 유한소수이고, 기약분수로 나타내면 $\frac{9}{b}$ 와 같을 때, $a - b$ 의 값은?

① 41

② 51

③ 61

④ 71

⑤ 81

해설

$$\frac{a}{180} = \frac{a}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{9}{b}$$

a 는 9의 배수가 되어야 하므로 81이 된다.

$$\therefore b = 20$$

$$\therefore a - b = 81 - 20 = 61$$