

1. 이차방정식 $ax^2 + (4a + 2)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이 $-5, b$ 일 때, $\frac{b}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{9}$

해설

$x = -5$ 일 때

$$a \times (-5)^2 + (4a + 2) \times (-5) - a - 2 = 0$$

$$25a - 20a - 10 - a - 2 = 0$$

$$4a = 12, a = 3$$

$$3x^2 + (4 \times 3 + 2)x - 3 - 2 = 0$$

$$3x^2 + 14x - 5 = 0$$

$$(x + 5)(3x - 1) = 0$$

$$x = -5, x = \frac{1}{3} = b$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

2. 두 이차방정식 $x(x+1)=0$, $x^2-4x-5=0$ 의 공통인 해가 $x=a$ 일 때, a 의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x(x+1)=0$ 의 해를 구하면 $x=-1$, $x=0$

$(x-5)(x+1)=0$ 의 해를 구하면 $x=-1$, $x=5$

$\therefore a=-1$

3. 이차방정식 $3x^2 + ax + 12 = 0$ 이 음수의 증근을 가질 때, a 의 값을 구하면?

① -12

② -9

③ 4

④ 9

⑤ 12

해설

$$3x^2 + ax + 12 = 0$$

$$x^2 + \frac{a}{3}x + 4 = 0, (x + 2)^2 = 0$$

$$\frac{a}{3} = 4 \quad \therefore a = 12$$

4. $3(x-a)^2 = 15$ 의 해가 $-7 \pm \sqrt{b}$ 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -35

해설

$3(x-a)^2 = 15$ 에서 $(x-a)^2 = 5$ 이므로

$$x-a = \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore x = a \pm \sqrt{5}$$

따라서 $a = -7$, $b = 5$ 이므로 $ab = -35$ 이다.

5. 이차방정식 $-3(x+b)^2 = 0$ 의 근의 개수가 m 개이고 근이 $m+2$ 일 때, b 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$-3(x+b)^2 = 0$ 은 $x = -b$ 의 중근이므로 근의 개수 $m = 1$ 이다.
근이 $m+2 = 1+2 = 3$ 이므로 $b = -3$ 이다.

6. 이차방정식 $(2x - 1)^2 = 3$ 의 두 근의 합을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$(2x - 1)^2 = 3$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 1$$

7. 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 $\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4$ 이라 한다. 이 때, abc 의 값은?

① 100

② 120

③ 240

④ -120

⑤ -100

해설

$$\frac{ax^2 + 2x + b}{5x^2 - cx + 3} = 4 \text{ 를 정리하면,}$$

$$(a - 20)x^2 + (2 + 4c)x + b - 12 = 0$$

이 식이 서로 다른 세 개의 x 값에 대하여 성립하므로 x 에 대한
항등식이다.

$$\text{따라서 } a - 20 = 0, 2 + 4c = 0, b - 12 = 0$$

$$\therefore a = 20, b = 12, c = -\frac{1}{2}$$

$$abc = 20 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -120$$

8. $7x - 5 < 4(x + 1)$ 이고 x 는 자연수일 때, $x^2 - 5x + 6 = 0$ 를 풀면?

① $x = 0, x = 1$

② $x = 2$

③ $x = 2, x = 3$

④ $x = 3$

⑤ $x = -2, x = 3$

해설

$7x - 5 < 4(x + 1)$ 에서 $7x - 4x < 4 + 5$, $3x < 9 \therefore x < 3$

따라서 x 의 값은 1, 2이다.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 의 해는 $x = 2, x = 3$ 이므로 해는 $x = 2$ 가 된다.

9. $5x + 2 \leq 4x + 5$ 이고 x 는 자연수 일 때, 다음 이차방정식을 풀면?

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

① $x = 1, x = 3$

② $x = 1, x = 5$

③ $x = 1$

④ $x = 2, x = 3$

⑤ $x = 2, x = 5$

해설

$5x + 2 \leq 4x + 5$ 에서 $x \leq 3$ 이다.

따라서 x 의 값은 1, 2, 3이다.

$x^2 - 6x + 5 = 0$ 를 만족하는 x 의 값은 $x = 1, x = 5$ 이므로
이차방정식의 해는 $x = 1$ 이다.

10. 부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 만족시키는 두 자연수가 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① 61

② 51

③ 11

④ -11

⑤ -61

해설

부등식 $2 \leq 2x - 2 < 5$ 를 풀면 다음과 같다.

$$4 \leq 2x < 7$$

$$2 \leq x < \frac{7}{2}$$

$$\therefore x = 2, 3$$

이 두 자연수를 근으로 가지므로 이를 이차방정식에 대입하여 풀면

$$a = -5, b = 6$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (-5)^2 - 6^2 = 25 - 36 = -11$$

11. 다음 중 $\left(\frac{7}{3}x - 14\right)(2y + 8) = 0$ 을 만족하는 것의 개수는?

㉠ $x = 6, y = -4$

㉡ $x = 6, y = 4$

㉢ $x = -6, y = -4$

㉣ $x = -6, y = 4$

㉤ $x = 4, y = 6$

㉥ $x = -4, y = 6$

① 한 개도 없다.

② 2 개

③ 3 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

$\frac{7}{3}x - 14 = 0$ 또는 $2y + 8 = 0$ 이므로

$x = 6$ 또는 $y = -4$ 인 것을 찾으면

$x = 6$ 인 것은 ㉠, ㉡

$y = -4$ 인 것은 ㉠, ㉢

따라서 만족하는 것의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢이므로
3 개이다.

12. 이차방정식 $\frac{1}{3}x^2 - 2x + m = 0$ 을 $\frac{1}{3}(x+n)^2 = -6$ 의 꼴로 나타낼 때,
 mn 의 값은?

① 21

② -21

③ 27

④ -27

⑤ -9

해설

$$\frac{1}{3}(x^2 - 6x) = -m, \frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) - 3 = -m$$

$$\frac{1}{3}(x-3)^2 = -m + 3$$

$$\therefore m = 9, n = -3$$

$$\therefore mn = -27$$

13. 이차방정식 $(x-1)^2 = 3-k$ 의 근에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $k = -6$ 이면 근이 2개이다.
- ② $k = -1$ 이면 정수인 근을 갖는다.
- ③ $k = 0$ 이면 무리수인 근을 갖는다.
- ④ $k = 1$ 이면 근이 1개이다.
- ⑤ $k = 3$ 이면 중근을 갖는다.

해설

$$(x-1)^2 = 3-k, \quad x-1 = \pm\sqrt{3-k}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3-k}$$

음수의 제곱근은 존재하지 않으므로 근호 안에 있는 수는 음수가 될 수 없다.

$3 > k$: 근이 0개

$k = 3$: 근이 1개

$3 < k$: 근이 2개

14. 이차방정식 $x - \frac{5}{x} = 7$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 7\alpha + 7)(\beta^2 - 7\beta + 3)$ 의 값을 구하면?

① 21

② 35

③ 60

④ 96

⑤ 140

해설

$$x - \frac{5}{x} = 7 \text{ 에서 양변에 } x \text{ 를 곱하면 } x^2 - 7x - 5 = 0$$

이 식에 $x = \alpha, \beta$ 를 각각 대입하면

$$\alpha^2 - 7\alpha - 5 = 0 \text{ 에서 } \alpha^2 - 7\alpha = 5$$

$$\beta^2 - 7\beta - 5 = 0 \text{ 에서 } \beta^2 - 7\beta = 5$$

$$\therefore (\alpha^2 - 7\alpha + 7)(\beta^2 - 7\beta + 3) = (5 + 7)(5 + 3) = 96$$

15. 직선 $ax - 3y = -3$ 이 점 $(a + 1, a^2)$ 을 지나고 제 4 사분면을 지나지 않을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = \frac{3}{2}$

해설

$ax - 3y = -3$ 이 점 $(a + 1, a^2)$ 을 지나므로

$$a(a + 1) - 3a^2 = -3$$

$$a^2 + a - 3a^2 + 3 = 0$$

$$-2a^2 + a + 3 = 0, 2a^2 - a - 3 = 0$$

$$(a + 1)(2a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

$ax - 3y = -3, y = \frac{a}{3}x + 1$ 이므로

$a > 0$ 일 때, 제 4 사분면을 지나지 않는다.

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

16. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ 이고, $k = f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80)$ 이다.
 k 가 x 에 관한 이차방정식 $(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 의 한 근일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{8}{3}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x}$$

$$= \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$k = f(49) + f(50) + f(51) + \cdots + f(79) + f(80)$$

$$= \sqrt{50} - \sqrt{49} + \sqrt{51} - \sqrt{50}$$

$$+ \cdots + \sqrt{81} - \sqrt{80}$$

$$= -\sqrt{49} + \sqrt{81}$$

$$= -7 + 9 = 2$$

$(a+5)x^2 + (a^2-2)x + 4(a-2) = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$4a + 20 + 2a^2 - 4 + 4a - 8 = 0$$

$$2a^2 + 8a + 8 = 0, \quad a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 식에 대입하면

$$3x^2 + 2x - 16 = 0, \quad (x-2)(3x+8) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = -\frac{8}{3}$$

17. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$$

양변에 2를 곱하면

$$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$$

$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$$

$$p-q=q-r=r-p=0$$

$$\therefore p=q=r$$

따라서 p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

18. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2ax - x + 2a = 0$ 과 $2x^2 + 2ax + 5x - a - 3 = 0$ 이 공통근을 가질 때, a 의 값을 구하여라. (단, $-4 < a < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

해설

$$x^2 - 2ax - x + 2a = 0$$

$$(x-1)(x-2a) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2a$$

$$2x^2 + 2ax + 5x - a - 3 = 0$$

$$(x+a+3)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -a-3 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

$$(i) \ 2a = \frac{1}{2} \text{ 일 때, } a = \frac{1}{4}$$

$$(ii) \ -a-3 = 1 \text{ 일 때, } a = -4$$

$$(iii) \ 2a = -a-3 \text{ 일 때, } a = -1$$

따라서 $-4 < a < 0$ 이므로 $a = -1$ 이다.

19. 방정식 ㉠의 해가 ㉡의 해 사이에 있을 때, 정수 m 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.

$$\textcircled{㉠} \quad 3x + 5 = m + 1$$

$$\textcircled{㉡} \quad 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

▶ 답 :

▶ 정답 : 6

해설

$$\textcircled{㉡} \quad 3x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{28}{9}$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

$$\textcircled{㉠} \quad 3x + 5 = m + 1$$

$$\therefore x = \frac{m-4}{3}$$

$$\frac{-1-2\sqrt{7}}{3} < \frac{m-4}{3} < \frac{-1+2\sqrt{7}}{3}$$

$$-1-2\sqrt{7} < m-4 < -1+2\sqrt{7}$$

$$3-2\sqrt{7} < m < 3+2\sqrt{7}$$

정수 m 의 최솟값은 -2 , 최댓값은 8 이다.

$$\therefore -2 + 8 = 6$$

20. 이차방정식 $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x}$ 의 양의 근을 α 라고 할 때, $3\alpha^2 - 3\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $11 + \sqrt{33}$

해설

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{2}{3x} \text{ 의 양변에 } 12x \text{ 를 곱하면}$$

$$3x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$3(x^2 - 2x + 1) = 8 + 3$$

$$3(x - 1)^2 = 11$$

$$\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$\alpha \text{ 는 양의 근이므로 } \alpha = 1 + \frac{\sqrt{33}}{3}$$

$$\therefore 3\alpha^2 - 3\alpha = 11 + \sqrt{33}$$