1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,

$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$

$\therefore\ k = 6$

2. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6

④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$= (a^3+b^3)(a^3-b^3) = a^6-b^6$

3. 다항식 $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y + 3$ 을 두 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 두 일차식의 합으로 옳은 것은?

① $3x + 3y - 2$ ② $3x - y - 4$ ③ $3x + y + 4$

④ $3x + y - 2$ ⑤ $3x - y + 2$

해설

$2x^2 + (3y + 5)x - (2y^2 - 5y - 3)$

$= \{2x + (2y + 1)\}\{x - (y - 3)\}$

$\therefore \ (2x + 2y + 1) + (x - y + 3) = 3x + y + 4$

4. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

5. 복소수 $z = x + yi$를 좌표평면 위에 점 $p(x,\ y)$에 대응시킬 때, $(3-4i)z$가 실수가 되게 하는 점 p의 자취가 나타내는 도형은?

① 기울기가 양인 직선 ② 기울기가 음인 직선

③ 위로 볼록한 포물선 ④ 아래로 볼록한 포물선

⑤ 원

해설

$$(3-4i)\,z = (3-4i)(x+yi)$$
$$= (3x+4y) + (-4x+3y)\,i$$

실수가 되려면 허수부 $-4x+3y=0$이다.

$\therefore y = \frac{4}{3}x$ ($\Rightarrow$ 기울기가 양인 직선)

6. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\ &= \{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\ &= -1-1-1=-3\end{aligned}$$

7. 어떤 실수 a에 대하여 두 수 $[a]$와 $a-[a]$를 근으로 하는 이차방정식이 $4x^2-7x+k=0$일 때, 상수 k의 값은?(단, $[a]$는 a보다 크지 않는 최대의 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$4(x-[a])(x-a+[a])=4x^2-4ax+4a[a]-4[a]^2$

$4a=7$이므로 $a=\frac{7}{4}$

$[a]=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$\therefore k=4a[a]-4[a]^2=7-4=3$

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$ 이 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$

④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,

즉 $x^2 + (a-3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로

$D = (a-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$a^2 - 6a - 27 < 0$

$(a+3)(a-9) < 0$

$\therefore -3 < a < 9$

9. 차가 12 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x, $x+12$ 라 하면

$y = x(x+12)$

$= x^2 + 12$

$x = (x+6)^2 - 36$

$x = -6$ 일 때, 최솟값 -36 을 갖는다.

$x = -6$, $-6 + 12 = 6$

따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

10. $x^2+x+1=0$ 일 때, $x^{100}+x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^{100}}$ 의 값은?

① 1 ② −2 ③ 0 ④ −1 ⑤ 2

해설

$x^2+x+1=0$ 에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^3=1$

$$(\text{준식}) = x\cdot x^{99}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot x^{99}}$$

$$= x+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

$$= -1+\frac{x+1}{x^2}(\because x^2+x=-1)$$

$$= -1+\frac{-x^2}{x^2}\ (\because x+1=-x^2)$$

$$= -2$$

11. 두 방정식 $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 모두 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$ 일 때 :

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0$ 또는 1

(ii) $x = 2y$ 일 때 :

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0$ 또는 $-\frac{1}{3}$

$\therefore (x,\ y) = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

12. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t+4)=0$ 에서

$t=1$ 또는 $t=-4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

13. 방정식 $2x + 5y = 84$를 만족하는 양의 정수 x, y의 해 중에서 x의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

해설

준식을 y에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 y가 양의 정수이므로 $42 - x$가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2,\ 7,\ \cdots,\ 37$

$\therefore$ x의 최댓값은 37

14. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$ ② $3Q(x),\ R$ ③ $Q(x),\ 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$ ⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$

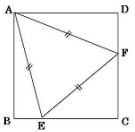
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$

$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫 : $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지 : R

15. 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 BC, CD 위에 각각 점 E, F 를 잡아 $\triangle AEF$ 가 정삼각형이 되도록 할 때, $\overline{BE}$의 길이를 구하면?



① $4-2\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{3}$ ③ $3-2\sqrt{2}$

④ $3-\sqrt{2}$ ⑤ $2-\sqrt{2}$

해설

$\overline{BE}=\overline{DF}=x$, $\overline{EC}=\overline{FC}=y$라 하면,

$x+y=2$

$\overline{AE}$ 는 ($\triangle ABE$ 가 직각삼각형이므로)

$\overline{AE}=\sqrt{4+x^2}$

$\overline{EF}$ 는 ($\triangle EFC$ 가 직각이등변삼각형이므로)

$\overline{EF}=\sqrt{2}y$

$\triangle AEF$ 는 정삼각형이므로

$\overline{AE}=\overline{EF}$

$\Rightarrow \sqrt{4+x^2}=\sqrt{2}y \Leftrightarrow 4+x^2=2y^2$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 4+x^2=2y^2 \end{cases}$$

을 연립하여 풀면 $x=4-2\sqrt{3}$