1. 다음에서 조건 p 는 조건 q이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

$p : a, b$는 모두 짝수 $\quad q : a+b$는 짝수

▶ 답 : ______조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$a,\ b$ 는 모두 짝수 $\rightarrow a+b$ 는 짝수 (역은 성립하지 않음) 증명)
$a=2m,\ b=2n$ $(n,\ m$ 은 자연수) 이면,
$a+b=2m+2n=2(m+n)$ 이므로 짝수이다.
한편, $a=3,\ b=3$ 일 때 $a+b=6$ 이므로 짝수이지만, $a,\ b$ 는 모두 홀수이다.
$\therefore p$ 는 q의 충분조건이다.

2. $x > 0,\ y > 0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x} + \sqrt{y},\ \sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le \sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ge \sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 0,\ \sqrt{2(x+y)} > 0$

이 때 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$= (x + y + 2\sqrt{xy}) - (2x - 2y)$

$= -(x - 2\sqrt{xy} + y)$

$= -(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \le 0$

이므로 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \le \left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \le \sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, 즉 $x = y$일때성립)

3. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

4. 양의 실수 a, b, c 사이에 대하여 $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$ 의 최솟값을 구하여라.

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

해설

$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1$

$=3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 에서

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$

$\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=2,\ \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=2$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $3+6=9$

5. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$이면 $x^3 = 1$이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$이면 $x > 0$이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$이면 $x^2 = 1$이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$ $\leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

6. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.' 의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

7. 명제 'x 가 소수이면 x 는 홀수이다.' 는 거짓이다. 다음 중 반례로 알맞은 것은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x = 2$ 인 경우에는 소수이지만 짝수이다.

8. 명제 '이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑지 않다.'의 대우는?

① 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑다.

② 이번 일요일에 날씨가 맑지 않으면, 그날 체육 대회는 열리지 않는다.

③ 이번 일요일에 날씨가 맑으면, 그날 체육 대회는 열린다.

④ 이번 일요일에 체육 대회가 열리지 않으면, 그날 날씨는 맑다.

⑤ 이번 일요일에 체육 대회가 열리면, 그날 날씨는 맑지 않다.

해설

명제 $p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$ 이다.

9. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$는 $a = b$이기 위한 (가)조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나)조건이다.

① 필요, 필요
② 필요, 충분
③ 충분, 충분
④ 충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b| \; \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} \; a = b$ ∴ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ ∴ 필요

10. $x > y > 0$인 실수 x, y에 대하여 $\frac{x}{1+x}$, $\frac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$

$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

11. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$　② $2^{10n} \le 1000^n$　③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \ge 1000^n$　⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$ 이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

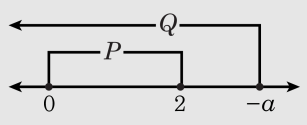
12. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x+a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

13. 실수 x 에 대하여 명제 '$ax^2+a^2x-6 \neq 0$ 이면 $x \neq 2$ 이다.' 가 참이기 위한 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
즉, '$x=2$ 이면 $ax^2+a^2x-6=0$ 이다.' 가 참이므로
$4a+2a^2-6=0$, $2a^2+4a-6=0$,
$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$
$\therefore$ $a=-3$ 또는 $a=1$
따라서 a 의 값의 합은 $-3+1=-2$

14. 두 명제 $p \to q$, $\sim r \to \sim q$가 모두 참일 때 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $q \to r$ ② $p \to r$ ③ $\sim q \to \sim p$

④ $r \to p$ ⑤ $\sim r \to \sim p$

해설

$p \to q(T) \Rightarrow \sim q \to \sim p\,(T)$, $\sim r \to \sim q\,(T) \Rightarrow q \to r\,(T)$

$\therefore\ p \to q \to r\,(T) \Rightarrow p \to r\,(T)$

$\therefore \sim r \to \sim p\,(T)$

15. 다음의 두 진술이 모두 참이라고 할 때, 옳은 것은?

> ㉠ 키가 큰 학생은 농구를 잘한다.
>
> ㉡ 키가 큰 학생은 달리기 또는 수영을 잘한다.

① 키가 큰 학생은 달리기를 잘한다.

② 수영을 잘하는 학생은 농구도 잘한다.

③ 농구를 잘하는 학생은 달리기도 잘한다.

④ 달리기를 못하는 학생은 키가 크지 않다.

⑤ 달리기와 수영을 모두 못하는 학생은 키가 크지 않다.

해설

키가 큰 학생의 집합을 A , 농구를 잘하는 학생의 집합을 B, 달리기를 잘하는 학생의 집합을 C , 수영을 잘하는 학생의 집합을 D 라고 하면,

㉠ $A \subset B$ ㉡ $A \subset (C \cup D)$

① $A \subset (C \cup D)$ 에서 $A \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

② $D \subset B$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

③ $B \subset C$ 라고 할 수 없으므로 거짓이다.

④ $A \not\subset C$ 이므로 $C^c \not\subset A^c$ 에서 거짓이다.

⑤ $A \subset (C \cup D)$ 에서 $(C \cup D)^c \subset A^c$

즉, $C^c \cap D^c \subset A^c$ 이므로 참이다.

16. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x - 2y + 3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x - 2y + 3z)^2$

$= \left\{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right\}$

$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x - 2y + 3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$

즉, $x = -y = \pm 2$일 때 등식이 성립한다.

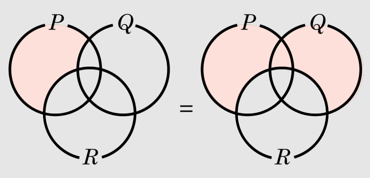
17. 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라고 하자. $P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$가 성립할 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $p \to q$ ② $r \to q$ ③ $q \to p$

④ $p \to r$ ⑤ $q \to r$

해설

$P-(Q\cup R)=(P\cup Q)-R$ 벤다이어그램으로 나타내면



$Q\cup R=R \leftrightarrow Q\subset R \therefore\ q\to r$ 가 참이다.

18. 다음은 명제 '$3m^2 - n^2 = 1$ 을 만족하는 (가)'에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

> … (생략) …
> m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$이므로, $n^2 + 1$은 3의 배수이다.
> 한편, 정수 n이 어떤 정수 k 에 대하여
> $n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
> $n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
> $n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
> 따라서 $n^2 + 1$을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
> … (생략) …

다음 중 위의 (가)에 가장 알맞은 것은?

① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.

② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.

③ m, n이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.

④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.

⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

해설

귀류법을 쓰면 m, n이 정수이고 $3m^2 = n^2 + 1$ 이므로, $n^2 + 1$은 3 의 배수이다. ⋯ ㉠
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,
$n = 3k$이면 $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$
$n = 3k+1$이면 $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$
$n = 3k+2$ 이면 $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$ 이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서, $n^2 + 1$을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다. ⋯ ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에 의하여 모순이다.
따라서, $3m^2 - n^2 = 1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

19. 조건 p, q, r 을 만족시키는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, $P = \{x | -1 \le x \le 1,\ x \ge 5\}$, $Q = \{x | x \ge a\}$, $R = \{x | x \ge b\}$ 이다. 이 때, 조건 q 는 p 이기 위한 필요조건이고, 조건 r 은 p 이기위한 충분조건이면 a 의 최댓값과 b 의 최솟값은?

① a 의 최댓값 1 , b 의 최솟값 -1

② a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 1

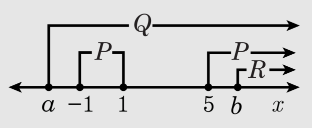
③ a 의 최댓값 5 , b 의 최솟값 -1

④ a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

⑤ a 의 최댓값 5, b 의 최솟값 -5

해설

$p \rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이면
q 는 p 이기 위한 필요조건,
$r \rightarrow p$, 즉 $R \subset P$ 이면
r 은 p 이기 위한 충분조건이므로
$P \subset Q$, $R \subset P$가 되는 a, b를 정할 수 있다.
문제의 조건을 만족시키도록 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면



따라서, $a \le -1$, $b \ge 5$
$\therefore$ a 의 최댓값 -1 , b 의 최솟값 5

20. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 <u>못한</u> 부분은?

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}} \cdots$ ㉠
$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$
$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots$ ㉡
$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2\cdot 4 = 8 \cdots$ ㉢
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. $\cdots\cdots$ ㉣

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉣
⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$

즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.