1. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　② 0　③ 2

④ 4　⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

2. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

3. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

4. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때, 나머지가 3 이고, 다항식 $f(x+2)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $ax+4$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하는 과정을 나타낸 것이다. (   ) 안에 알맞지 않은 것을 고르면?

> 풀이) $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 3 이므로 (ⓐ) 이다.
> $f(x+2)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
> (ⓑ) $\cdots$ (㉠)
> (㉠) 은 x 에 대한 항등식이므로 $x=-1$ 을 대입하면 (ⓒ) 이다.
> 따라서 (ⓓ) 에서 (ⓔ) 이다.

① ⓐ $f(1)=3$

② ⓑ $f(x+2)=(x+1)^2Q(x)+ax+4$

③ ⓒ $f(-1)=-a+4$

④ ⓓ $-a+4=3$

⑤ ⓔ $a=1$

해설

㉠에 $x=-1$ 를 대입하면 $f(1)=-a+4$

5. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(\text{준식}) = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2$$
$$= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)$$
$$\therefore\ a + b + c + d = 4$$

6. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
$(x-1)\left(3x^2 + ax + 2a\right)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+2)(x+1)$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$ 는

$x+2$ 또는 $x+1$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$ 로 놓을 때

$x+2$ 가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$ 가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x+1$ 를 인수로 갖는다.

$x+1$ 이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

7. 복소수 $z = 1 + 4i$일 때, $\overline{x(2-i)} + y(1-i) = \bar{z}$가 성립하도록 하는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은? (단, $\bar{z}$는 복소수 z의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$)

① 0　　② 2　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$z = 1 + 4i$이므로 $\bar{z} = 1 - 4i$이다.
주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} \overline{x(2-i)} + y(1-i) &= \bar{x}\,\overline{(2-i)} + y(1-i) \\ &= x(2+i) + y(1-i) \end{aligned}$$

$\therefore\ x(2+i) + y(1-i) = 1 - 4i$
$(2x+y) + (x-y)i = 1 - 4i$
복소수가 서로 같을 조건에서
$2x + y = 1,\ x - y = -4$
위 두 식을 연립하여 풀면 $x = -1,\ y = 3$
$\therefore\ x + y = 2$

8. 두 실수 $x,\ y$가 $x+y=-5,\ xy=2$를 만족할 때, $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x+y=-5,\ xy=2$에서 $x<0,\ y<0$이다.

$$\therefore \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$$
$$=\frac{x+y}{-\sqrt{xy}}$$
$$=\frac{-5}{-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

9. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0,\ c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0,\ c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a,b,c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

10. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $a=b$ 인 이등변삼각형

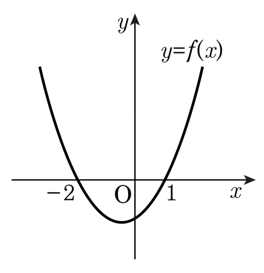
④ $b=c$ 인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
$(a-c)x^2+2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$D=0$ 이어야 하므로
$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$
즉 $b^2-a^2+c^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

11. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y = f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y = f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$
$\therefore a = -3$

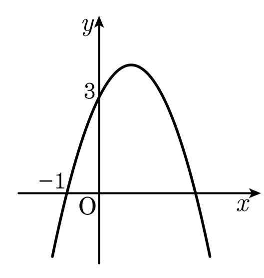
12. 직선 $y=2x+k$ 가 이차함수 $y=-x^2-6x+1$ 의 그래프와는 만나고, 이차함수 $y=-x^2+4x$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 정수 k 의 개수는?

① 10 개 ② 12 개 ③ 14 개 ④ 16 개 ⑤ 18 개

해설

직선 $y=2x+k$ 가
곡선 $y=-x^2-6x+1$ 과 만날 때
$2x+k=-x^2-6x+1$ 에서
$x^2+8x+k-1=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
$\frac{D_1}{4}=16-k+1\geq 0$ 에서 $k\leq 17$
직선 $y=2x+k$ 가
곡선 $y=-x^2+4x$ 와 만나지 않을 때
$2x+k=-x^2+4x$ 에서
$x^2-2x+k=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
$\frac{D_2}{4}=1-k<0$ 에서 $k>1$
따라서 k 의 값의 범위는 $1<k\leq 17$ 이므로
정수 k 의 개수는 16 개이다.

13. 아래 그림은 이차함수 $y = ax^2 + 2x + c$ 의 그래프이다. 이차함수의 최댓값은?



① $\frac{7}{2}$　② 4　③ $\frac{9}{2}$
④ 5　⑤ $\frac{11}{2}$

해설

$y = ax^2 + 2x + c$ 에 점$(-1,\ 0)$, $(0,\ 3)$ 을 대입하면

$0 = a - 2 + c$
$3 = c,\ a = -1$

$y = -x^2 + 2x + 3$
$\therefore y = -(x-1)^2 + 4$
따라서 최댓값은 4 이다.

14. 이차함수 $y = -x^2 - 4mx$ 의 최댓값이 16 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.(단, $m > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -x^2 - 4mx = -(x + 2m)^2 + 4m^2$
최댓값이 16 이므로 $4m^2 = 16$
$m > 0$ 이므로 $m = 2$ 이다.

15. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초　② 2 초, 4 초　③ 2 초, 6 초
④ 3 초, 6 초　⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은
$y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80
따라서 2 초 후이다.
지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.
$0 = -5x^2 + 20x + 60$
$-5(x^2 - 4x - 12) = 0$
$-5(x-6)(x+2) = 0$
그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$
즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

16. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$

$\therefore\ k=4,\ a=2,\ b=0$