1. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

2. 이차함수의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값이 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $y = 2x^2 \rightarrow x = 0$ 일 때, 최솟값 0

② $y = -3x^2 + 4 \rightarrow x = 0$ 일 때, 최댓값 4

③ $y = -(x+3)^2 \rightarrow x = -3$ 일 때, 최댓값 0

④ $y = -(x+2)^2 - 1 \rightarrow x = -2$ 일 때, 최댓값 -1

⑤ $y = 2x^2 + 4x + 1 \rightarrow x = -1$ 일 때, 최솟값 1

해설

⑤ $y = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 1$
$y = 2(x+1)^2 - 1$
따라서 $x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

3. 이차함수 $y=-5x^2+20x+3$은 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a+b$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$$y=-5x^2+20x+3$$
$$=-5(x^2-4x+4-4)+3$$
$$=-5(x-2)^2+23$$
$$\therefore a=2,\ b=23$$
$$\therefore a+b=2+23=25$$

4. $x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가지고, 점 $(0,\ -3)$ 을 지나는 포물선의 식은?

① $y=-\dfrac{3}{2}(x-2)^2+3$

② $y=-\dfrac{3}{2}(x+2)^2+3$

③ $y=-\dfrac{2}{3}(x-2)^2+3$

④ $y=-\dfrac{2}{3}(x+2)^2+3$

⑤ $y=-2x^2+3$

해설

$x=-2$ 일 때, 최댓값 3을 가진다는 것은 그래프가 위로 볼록하고, $y=a(x+2)^2+3$ 의 형태임을 의미한다.

이 중 $(0,\ -3)$ 을 지나면,

$-3=4a+3$

$4a=-6$

$a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ y=-\dfrac{3}{2}(x+2)^2+3$

5. x의 범위가 $-3 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = x^2 - 2x - 1$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

$\Rightarrow m : x = 1$ 일 때 : -2,

$M : x = -3$ 일 때 : 14

$\therefore m + M = 12$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개　　② 8 개　　③ 10 개　　④ 13 개　　⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.

$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$

$\Rightarrow k < 16$

$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

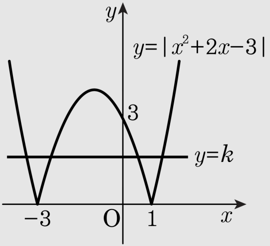
7. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　　② $k > 4$　　③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$　　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0<k<3$



8. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a+1=0$의 두 실근 α, β에 대하여 $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$의 값이 최소일 때, 상수 a의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ 0 ⑤ 3

해설

$x^2+(a+1)x+a+1=0$이 실근을 가지므로

$D=(a+1)^2-4(a+1)\geq 0,\ \ (a+1)(a-3)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+1),\ \alpha\beta=a+1$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta \\ &= (a+1)^2-(a+1) \\ &= a^2+a=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이때, $a\leq -1$ 또는 $a\geq 3$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 는 $a=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

9. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개 ② 3 개 ③ 4 개 ④ 5 개 ⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

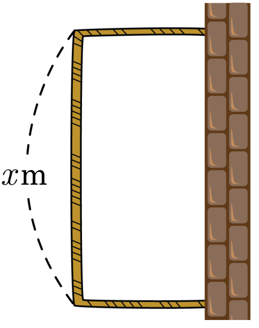
$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

10. 다음 그림과 같이 길이 $20\,\mathrm{m}$ 인 철망을 담벽에 ㄷ자 모양으로 둘러싸서 닭장을 만들려고 한다. 이 닭장의 넓이의 최댓값은 얼마인가?



① 70 m^2 ② 40 m^2 ③ 50 m^2

④ 80 m^2 ⑤ 60 m^2

해설

닭장 넓이를 y라 하면

$$\begin{aligned} y &= x\left(\frac{20-x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2+20x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-20x+100-100) \\ &= -\frac{1}{2}(x-10)^2+50 \end{aligned}$$

$\therefore x = 10$ 일 때 최댓값 $50\,\mathrm{m}^2$

11. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

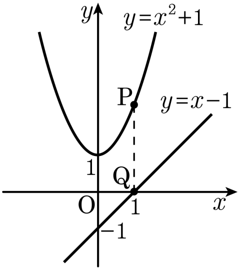
① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3 이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

12. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

13. 지상에서 초속 50m 의 속력으로 쏘아 올린 공의 t 초 후의 높이는 $(50t - 5t^2)$m 이다. 이 공의 높이가 지상으로부터 최대가 되는 것은 쏘아 올린지 몇 초 후인가?

① 5 초 후　　② 7 초 후　　③ 8 초 후

④ 10 초 후　　⑤ 알 수 없다

해설

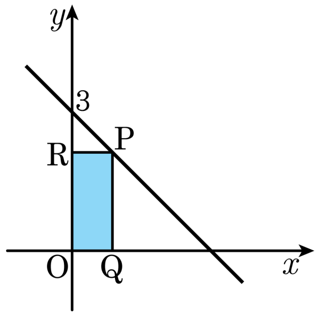
$y = 50t - 5t^2$

$y = -5(t^2 - 10t + 25 - 25)$

$\quad = -5(t - 5)^2 + 125$

따라서 5 초 후에 최고 높이 125m 가된다.

14. 다음 그림과 같이 직선이 $y = -x+3$ 의 위의 점 P 에서 x 축과 y 축에서 내릴 수선의 발이 각각 Q, R 이고 직사각형 PQOR 의 넓이를 y 라고 한다. y 가 최대가 될 때, 점 P 의 좌표는?



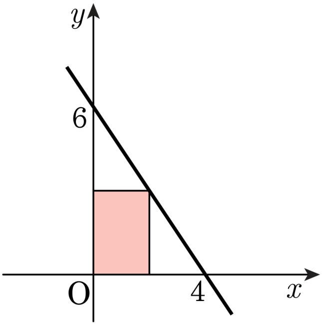
① $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$　② $\left(0, \frac{3}{2}\right)$　③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$　⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+3)$ 이고 넓이는 y 이므로

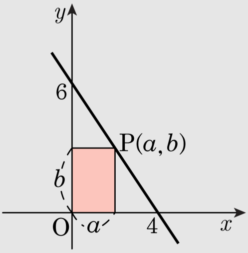
$$y = a(-a+3) = -a^2+3a$$
$$= -\left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}$$
$$= -\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$
$$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}+3\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

15. 다음 그림과 같이 직사각형의 두 변이 x 축, y 축 위에 있고, 네 꼭짓점 중 하나는 직선 $3x+2y=12$ 위에 있다. 이 직사각형의 넓이가 최대일 때, 네 변의 길이의 합은?



① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 16

해설



직사각형의 가로 a , 세로 b라 하면 $a>0$, $b>0$

$\mathrm{P}(a,\ b)$는 직선 $3x+2y=12$ 위의 점이므로

$3a+2b=12$

$b=6-\frac{3}{2}a$, $a>0$, $b=6-\frac{3}{2}a>0$, $a<4$

$\therefore 0<a<4$

또 직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= ab = a\left(6-\frac{3}{2}a\right) = -\frac{3}{2}a^2+6a \\ &= -\frac{3}{2}(a^2-4a) = -\frac{3}{2}(a-2)^2+6 \end{aligned}$$

(단, $0<a<4$)

$a=2$일 때, 최댓값 6을 갖고

이 때, $b=6-\frac{3}{2}a=3$이다.

이 때, 직사각형 네 변의 길이의 합은 $2(a+b)=10$