1. 다항식 x^3+ax^2+bx+c 를 $x+2$로 나누면 3이 남고, x^2-1로 나누면 떨어진다. 이 때, abc의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^3+ax^2+bx+c=(x+2)Q_1(x)+3$

$=(x+1)(x-1)Q_2(x)$

$f(-2)=3 \quad f(1)=0 \quad f(-1)=0$

$x=-2$ 대입, $-8+4a-2b+c=3$

$x=-1$ 대입, $-1+a-b+c=0$

$x=1$ 대입, $1+a+b+c=0$

세 식을 연립해서 구하면

$a=3, b=-1, c=-3$

$\therefore\ abc=9$

2. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$
$\quad\quad=(x+2)(x-1)Q(x)$
인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.
$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$
$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$
$\therefore\ a^2+b^2=5$

3. 다항식 $2x^3+3x^2+ax+b$가 $x+2$로 나누어 떨어질 때, $2a-b$의 값은?

① 28 ② 12 ③ 6 ④ -4 ⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2)=0$이므로
$-16+12-2a+b=0$에서 $2a-b=-4$

4. 이차방정식 $x^2-3x-1=0$의 두 근을 α , β라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}$ 의 값은?
(단, $\alpha>\beta$)

① $-\sqrt{13}$ ② $-\sqrt{5}$ ③ -1
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9+4=13$
$\therefore\ \alpha-\beta=\sqrt{13}\ (\because\ \alpha>\beta)$
$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-\sqrt{13}}{-1}=\sqrt{13}$

5. 이차방정식 $x^2+kx+k-1=0$의 한 근이 다른 한 근의 3배가 되도록 하는 상수 k의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

한 근이 다른 한 근의 3배이므로 두 근을 α, 3α라고 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=-k\cdots\cdots$㉠

$\alpha\cdot 3\alpha=k-1\cdots\cdots$㉡

㉠에서 $\alpha=-\frac{k}{4}$ 이것을 ㉡에 대입하면

$3\left(-\frac{k}{4}\right)^2=k-1$, $3k^2-16k+16=0$, $(3k-4)(k-4)=0$

$\therefore k=4$

해설

6. $x^2-2x+7=0$의 두 근을 α, β라 할 때 $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$을 계산하면?

① $-\frac{3}{49}$ ② $-\frac{10}{49}$ ③ $-\frac{10}{7}$ ④ 10 ⑤ 20

해설

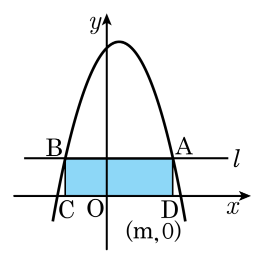
근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=7$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=-\frac{10}{49}$$

7. $y=-x^2+x+6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은?$\left(\frac{1}{2}<m<3\right)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10 ④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y=-x^2+x+6=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m,\ -m^2+m+6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2\left(m-\frac{1}{2}\right)$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2+m+6$

(□ABCD둘레의 길이)

$=2\{2\left(\mathrm{m}-\frac{1}{2}\right)-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6\}$

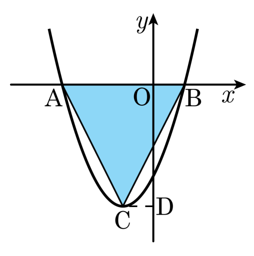
$=2(2\mathrm{m}-1-\mathrm{m}^2+\mathrm{m}+6)$

$=2(-\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+5)$

$=-2\left(\mathrm{m}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{29}{2}$

$m=\frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.

8. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 두 점을 A ,B , 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이는?

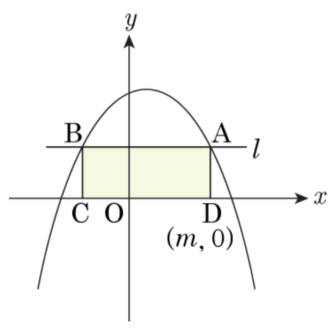


① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$
꼭짓점 C$(-1, -4)$
$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로
A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$
$\therefore \triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

9. $y = -x^2 + x + 6$ 의 그래프와 x 축에 평행인 직선 l 이 만나는 두 점 A, B 에서 x 축에 수선을 그어 그 수선의 발을 각각 D, C 라 하고, 점D 의 x 좌표를 m 이라고 할 때, □ABCD 의 둘레의 길이의 최댓값은?$(\frac{1}{2} < m < 3)$



① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{31}{4}$ ③ 10
④ $\frac{49}{4}$ ⑤ $\frac{29}{2}$

해설

$y = -x^2 + x + 6 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}$ 의 점 A 의 좌표는 $(m, -m^2 + m + 6)$ 이다.

직사각형의 가로의 길이는 $2(m - \frac{1}{2})$ 이고,

직사각형의 세로의 길이는 $-m^2 + m + 6$

$$
\begin{aligned}
(\square\text{ABCD둘레의 길이}) &= 2\{2(m - \tfrac{1}{2}) - m^2 + m + 6\} \\
&= 2(2m - 1 - m^2 + m + 6) \\
&= 2(-m^2 + 3m + 5) \\
&= -2(m - \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{29}{2}
\end{aligned}
$$

$m = \frac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 $\frac{29}{2}$ 이다.