1. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

2. 다음 □안에 들어갈 식이 바르게 연결되지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2-\boxed{\text{(가)}}a+\boxed{\text{(나)}}(b-c)\\
&=\boxed{\text{(다)}}\{a^2-\boxed{\text{(라)}}a+\boxed{\text{(나)}}\}\\
&=(b-c)(a-b)\boxed{\text{(마)}}
\end{aligned}
$$

① (가) (b^2-c^2) ② (나) bc ③ (다) $(b-c)$

④ (라) $(b+c)$ ⑤ (마) $(c-a)$

해설

$$
\begin{aligned}
&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\
&=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2\\
&=(b-c)a^2-\boxed{(b^2-c^2)}a+\boxed{bc}(b-c)\\
&=\boxed{(b-c)}\{a^2-\boxed{(b+c)}a+\boxed{bc}\}\\
&=(b-c)(a-b)\boxed{(a-c)}
\end{aligned}
$$

3. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

4. 이차방정식 $x^2+6x+6=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$의 값을 다음과 같이 구하였다. 아래 풀이 과정에서 처음으로 잘못된 곳은?

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-6,\ \alpha\beta=6 \cdots$ (가)
$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$
$=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \cdots$ (나)
$=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdots$ (다)
$=-\sqrt{6} \cdots$ (라)

① (가) ② (나)
③ (다) ④ (라)
⑤ 잘못된 곳이 없다.

해설

$x^2+6x+6=0$의 두 근은 $x=-3\pm\sqrt{3}$에서
$\alpha=-3+\sqrt{3}<0,\ \beta=-3-\sqrt{3}<0$
$\therefore\ \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$
$\therefore\ \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\beta}{-\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{\alpha}{-\sqrt{\alpha\beta}}$
$=-\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$
따라서 처음으로 잘못된 부분은 (다)이다.

5. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4$
이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x 의 값의 범위에 속하므로
$x = a$ 일 때 최솟값, $x = a+4$ 일 때 최댓값을 갖는다.
즉, $f(a+4) = (a+4)^2 - 2a(a+4) + 4 = 4$
$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$
$a^2 = 16$
$\therefore a = 4 \ (a > 0)$

6. $0 \le x \le 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

해설

$$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$$

$0 \le x \le 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,

최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.

$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고

최솟값은 $a - 24$ 이다.

최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로

$(a + 1) + (a - 24) = 10$

$\therefore a = \frac{33}{2}$

7. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$(\text{준식}) = \frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}$$
$$= \frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc}$$
$$= \frac{-(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$
$$= \frac{-3abc}{abc} = -3$$

해설

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$= \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$= \frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}$$
$$= \frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a} \ (\because\ a+b+c=0)$$
$$= -3$$

8. $a+b+c=0$ 일 때, $\dfrac{a^2+1}{bc}+\dfrac{b^2+1}{ac}+\dfrac{c^2+1}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(\text{준식}) = \frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$$

$$= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$ 이므로

$$\therefore \ \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

9. 구입 가격이 1kg에 2000원인 돼지고기를 1kg에 3000원씩 판매하면 하루에 100kg을 팔 수 있으며 1kg에 10원씩 판매 가격을 내릴 때마다 판매량이 3kg씩 증가하고 1kg에 10원씩 판매 가격을 올릴 때마다 판매량이 3kg씩 감소한다고 한다.
1kg에 p원씩 판매할 때, 하루의 이익을 최대로 할 수 있는 p의 값을 구하면? (단, 판매가격은 10원 단위로만 인상 또는 인하 할 수 있다.)

① 2600원 ② 2670원 ③ 2700원
④ 2750원 ⑤ 2800원

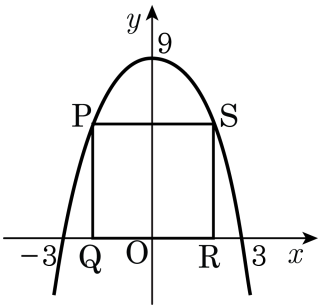
해설

3000원에서 $10x$원 가격을 내렸을 때
1kg의 판매가격은 $3000 - 10x$
1일 판매량은 $100 + 3x$
따라서 하루의 이익 P는

$$\begin{aligned} P &= (3000 - 10x)(100 + 3x) - 2000(100 + 3x) \\ &= (1000 - 10x)(100 + 3x) \\ &= -30x^2 + 2000x + 100000 \\ &= -30\left(x^2 - \frac{200}{3}x\right) + 100000 \\ &= -30\left(x - \frac{100}{3}\right)^2 + \frac{400000}{3} \end{aligned}$$

x가 문제에서 정수이므로 $x = 33$일 때 최대이다.
따라서 $3000 - 330 = 2670$(원)

10. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20