1. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$ 의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

2. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$

$A = (x + p)$

$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$

$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$

우변을 정리하면

$\therefore \ a = -2, b = 3$

$\therefore ab = -6$

3. $x+y+z=1,\ \ xy+yz+zx=2,\ \ xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$ 에서
$x+y=1-z$
$y+z=1-x$
$z+x=1-y$
$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$
$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$
$=1-1+2-3=-1$

4. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
양변에 $x = 2, -2, 1$을 각각 대입하면
$0 = 1 + a + b + c,\ 0 = -27 + 9a - 3b + c,\ -9 = c$
세 식을 연립하여 풀면 $a = 5,\ b = 3,\ c = -9$
$\therefore\ a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
$= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & & \\
 & & 1 & 3 & -1 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{b} & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \mathrm{a} & & &
\end{array}$$

$\therefore\ a(b+c) = 5(3-9) = -30$

5. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서
$(2-4k)x+3a-k=0$
이 식은 x에 대한 항등식이므로,
$2-4k=0,\ 3a-k=0$
$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$
$\therefore\ 12a=2$

6. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

7. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

9. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & a & b & 1 \\ & & c & d & 1 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{2} \end{array}$$

① $a=3$　② $b=2$　③ $c=-1$

④ $d=-3$　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & a & b & 1 \\ & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\ \hline & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a} \end{array}$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

10. 다항식 $P(x) = x^4 + 2x^3 + kx^2 - 2x + 8$가 $x-1$로 나누어 떨어지도록 상수 k의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+4$

해설

$P(x) = (x-1)Q(x)$

$\therefore\ P(1) = 1 + 2 + k - 2 + 8 = 0$

$\therefore\ k = -9$

$$\begin{aligned} \therefore\ P(x) &= x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 \\ &= (x-1)(x-2)(x+1)(x+4) \end{aligned}$$

11. 임의의 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $*$를 $A*B=A^2+B^2-A-B$라 할 때, 다음 중 $(x+1)*X=2(x+1)^2$을 만족하는 다항식 X는?

① $x-1$　　② $x+2$　　③ $2(x-2)$

④ $2(x+3)$　　⑤ $(x+1)(x-2)$

해설

주어진 조건에 의해, 식을 전개하면 다음과 같다.

$x^2+x+X^2-X=2x^2+4x+2$

$X^2-X=x^2+3x+2,$

$[X-(x+2)][X+(x+1)]$

따라서 $X=x+2$ 또는 $X=-x-1$

12. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
>
> (나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$\quad =(x-1)(x-2)(x+3)\cdots$ ㉠

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$

($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면

$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$

$\quad =G(x)\{A(x)+B(x)\}$이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$

$\quad =2(x-2)(x+1)\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

13. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

(준식) $=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2+3a+2=0$
$a^2+2a \neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

14. x, y가 양의 실수이고, $x^2+xyi+y^2-5-2i=0$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2+y^2-5)+(xy-2)i=0$

$x^2+y^2-5=0 \cdots ㉠$

$xy-2=0 \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하면

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+4=9$

$\therefore\ x+y=3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

15. $z \cdot \bar{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 $z_1,\ z_2$ 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$ 는 각각 $z_1,\ z_2$ 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2,\ b + d = 0$
㉠ − ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore\ a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$

16. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$는 $x+yi$의 켤레복소수이다.)

$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$

$(\overline{x+yi})=\dfrac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$

$x+yi=1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2 + bx = -(a^2 - 3bx + c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ b가 빗변인 직각삼각형
④ $a = b$인 이등변삼각형
⑤ $b = c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$이
방정식이 중근을 가지므로
$$\frac{D}{4} = (-b)^2 - (a^2 + c^2) = 0$$
$\therefore b^2 = a^2 + c^2$
따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

18. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \ge -2$ ② $a \ge 4$ ③ $a \le 4$
④ $a \ge -4$ ⑤ $a \ge 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면
$x^2 - kx + (2k-a) = 0$
실근을 가지려면 판별식 $D \ge 0$이어야 한다.
$k^2 - 4(2k-a) \ge 0$
$k^2 - 8k + 4a \ge 0$
위 부등식을 k에 대하여 정리하면
$(k-4)^2 + 4a - 16 \ge 0$
실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면
판별식 $\frac{D}{4} \le 0$이거나,
$4a - 16 \ge 0(\because (k-4)^2 \ge 0)$이어야 한다.
따라서 $a \ge 4$

19. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4 = 4k^2 - (5-k^2) \geq 0$

$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0,\ 5k^2 \geq 5,\ \therefore k^2 \geq 1$

$\alpha + \beta = 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \end{aligned}$$

$18k^2 \geq 18,\ 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8,\ \therefore$ (최솟값)$= 8$

20. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 직선 $y = bx$가 만나는 두 교점을 P, Q라 한다. 점 P의 x좌표가 $2 + \sqrt{3}$일 때, $a + b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ y = bx \end{cases}$$

$bx = x^2 - a$ $\therefore$ P, Q의 x좌표는 $x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
점 P의 x좌표가 $2 + \sqrt{3}$이므로,
켤레근인 $2 - \sqrt{3}$은 점 Q의 x좌표이다.
근과 계수와의 관계에 의해서
$b = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$
$-a = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ $\therefore$ $a = -1$
$\therefore$ $a + b = (-1) + 4 = 3$

21. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　　② $2^{32}+1$　　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \quad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

22. 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2+1$, $P(0) = 0$을 만족한다. 2차 이하의 다항식 $P(x)$의 계수의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2
④ 3　　⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$라 하면
$P(0) = 0$에서 $c = 0$ $\therefore$ $P(x) = ax^2 + bx$
$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$이므로
$a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) = (ax^2+bx)^2 + 1$
$ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$
양변의 계수를 비교하면
$a = a^2,\ 2ab = 0,\ 2a + b = b^2,\ a + b = 1$
$a^2 = a$와 $a + b = 1$에서
$(a,\ b) = (0,\ 1),\ (1,\ 0)$이 되는데
이 중 $(1,\ 0)$은 $2a+b = b^2$을 만족하지 않으므로 $(a,\ b) = (0,\ 1)$
즉, $P(x) = x$뿐이다.
$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$에서 $x = 0$을 대입하면
$P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$이 된다.
$P(1) = 1$($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x = 1$ 대입)

23. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_8 x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28　　② 26　　③ 15　　④ 14　　⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡

㉠ – ㉡ : $26 = 2\,(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

24. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　　② $a = 1$ 또는 2　　③ $a = -1$ 또는 2

④ $a = 0$ 또는 1　　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

25. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

26. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x) = x^4 - 10x^2 + 9$, $B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $C(x) = x(x-3)(x^2+a) - (x-3)(x^2+b) + 8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ 2

해설

$A(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$
$B(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$
$\quad = (x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$
$\therefore$두 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)(x-3)$
그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로
세 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)$이다.
$\therefore$ 다항식 $C(\pm 1) = 0$
$\therefore\ C(1) = -a + b + 4 = 0,\ C(-1) = a + b + 4 = 0$
$\therefore\ a = 0,\ b = -4$에서 $a + b = -4$

27. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n} = -1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = \frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이므로 $n = 4k+2(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n = 2, 6, 10$

$\therefore\ 2+6+10 = 18$

28. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ ($x,\ y$ 는 실수)로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5} + i$
$x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2 - y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ 이므로
$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$
$x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5} - i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

29. $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$= (w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$= (-w-2)^2+(w-1)^2$

$= w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$= 2w^2+2w+5$

$= 2(w^2+w+1)+3$

$= 3$

30. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha|=\dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$q=\dfrac{1}{4}p^2+2p+5=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$q=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

31. $x^2 - x - 1 = 0$일 때, $x^3 - \frac{1}{x^3}$의 값과 $y + \frac{1}{y} = 1$일 때, $\frac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, −1　　② 4, 18　　③ 8, −1　　④ 9, −1　　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2 - x - 1 = 0$의 양변을 x로 나누면

$x - 1 - \frac{1}{x} = 0$

$\therefore\ x - \frac{1}{x} = 1$

$\therefore\ x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$= 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

(2) $y + \frac{1}{y} = 1$일 때

$y + \frac{1}{y} = 1$에서 $\frac{y^2+1}{y} = 1$

$\therefore\ y^2 - y + 1 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$

$y^3 + 1 = 0 \therefore\ y^3 = -1 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{y^{10}+1}{y^2} = \frac{(y^3)^3 \cdot y + 1}{y^2} = \frac{-y+1}{y^2}$

$= \frac{-y^2}{y^2} = -1$

32. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$
그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로
$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$
또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로
$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$
따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$
$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2