1. 다항식 $x^5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차　② 3차　③ 6차　④ 7차　⑤ 8차

해설

$$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$$

$$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$$

$\therefore$ 6차 다항식

2. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\quad \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ \ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

3. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서

$x+y=1-z$

$y+z=1-x$

$z+x=1-y$

$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

4. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

양변에 $x = 2, -2, 1$을 각각 대입하면

$0 = 1 + a + b + c,\ 0 = -27 + 9a - 3b + c,\ -9 = c$

세 식을 연립하여 풀면 $a = 5,\ b = 3,\ c = -9$

$\therefore\ a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.

$(x-2)(x+2)^2$

$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$

$= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 \\
 & & 1 & 3 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} \leftarrow \text{c} \\
 & & 1 & 4 & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} \leftarrow \text{b} & \\
 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} \leftarrow \text{a} & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a(b+c) = 5(3-9) = -30$

5. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

6. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

7. 두 다항식 $f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$f(x)=x^2+3x+a$, $g(x)=x^3+ax$에서

$f(-2)=g(-2)$이므로

$4-6+a=-8-2a$

$\therefore\ a=-2$

8. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

9. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

$$
\begin{array}{r|rrrr}
k & 1 & a & b & 1 \\
 & & c & d & 1 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & \boxed{2}
\end{array}
$$

① $a=3$　　② $b=2$　　③ $c=-1$

④ $d=-3$　　⑤ $k=-1$

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+1를 $x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & a & b & 1 \\
 & & -1 & -a+1 & -b+a-1 \\
\hline
 & 1 & a-1 & b-a+1 & \boxed{-b+a}
\end{array}
$$

이때 $k=-1$, $c=-1$, $d=-a+1$, $b-a+1=-1$, $-b+a=2$ 이므로

$k=-1$, $c=-1$, $a=4$, $b=2$, $d=-3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

10. 다항식 $P(x)=x^4+2x^3+kx^2-2x+8$가 $x-1$로 나누어 떨어지도록 상수 k의 값을 정할 때 다음 중 $P(x)$의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-2$ ④ $x+2$ ⑤ $x+4$

해설

$P(x)=(x-1)\,Q(x)$

$\therefore\ P(1)=1+2+k-2+8=0$

$\therefore\ k=-9$

$\therefore\ P(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$

$\qquad\quad =(x-1)(x-2)(x+1)(x+4)$

11. 임의의 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $*$를 $A * B = A^2 + B^2 - A - B$ 라 할 때, 다음 중 $(x+1) * X = 2(x+1)^2$을 만족하는 다항식 X는?

① $x - 1$ ② $x + 2$ ③ $2(x-2)$

④ $2(x+3)$ ⑤ $(x+1)(x-2)$

해설

주어진 조건에 의해, 식을 전개하면 다음과 같다.

$x^2 + x + X^2 - X = 2x^2 + 4x + 2$

$X^2 - X = x^2 + 3x + 2,$

$[X - (x+2)][X + (x+1)]$

따라서 $X = x + 2$ 또는 $X = -x - 1$

12. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots ㉠$$

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$

($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면

$$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$$
$$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$$ 이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$$
$$=2(x-2)(x+1)\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

13. 복소수 $a^2(1+i)+a(3+2i)+2$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$(\text{준식})=\left(a^2+3a+2\right)+\left(a^2+2a\right)i \Rightarrow$ 순허수

즉, $a^2+3a+2=0$

$a^2+2a\neq 0$이므로 $\therefore\ a=-1$

14. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$

$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠

$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$

$\therefore\ x + y = 3$ ($\because\ x,\ y$ 는 양의 실수)

15. $z \cdot \bar{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 z_1, z_2 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ 는 각각 z_1, z_2 의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$

(a, b, c, d 는 실수)로 놓으면

$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로

$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서

$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠

$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서

$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡

$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a + c = 2, \ b + d = 0$

㉠ $-$ ㉡을 하면

$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$

$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$

그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$

$\therefore \ a = -c$ 또는 $a = c$

그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$

㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$

따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로

$z_1 \cdot z_2 = 1$

16. 다음 등식을 만족하는 실수 x의 값을 a, y의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하여라.
(단, $\overline{x+yi}$ 는 $x+yi$ 의 켤레복소수이다.)

$$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(2+i)(\overline{x+yi})=5(1-i)$

$(\overline{x+yi})=\dfrac{5(1-i)}{2+i}=1-3i$

$x+yi=1+3i$

$a=1,\ b=3$

$\therefore\ a+2b=7$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2 + bx = -(a^2 - 3bx + c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형

② a가 빗변인 직각삼각형

③ b가 빗변인 직각삼각형

④ $a = b$인 이등변삼각형

⑤ $b = c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면

$x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$이

방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-b)^2 - (a^2 + c^2) = 0$$

$\therefore b^2 = a^2 + c^2$

따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

18. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$ ② $a \geq 4$ ③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$ ⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2 - kx + (2k - a) = 0$

실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.

$k^2 - 4(2k - a) \geq 0$

$k^2 - 8k + 4a \geq 0$

위 부등식을 k에 대하여 정리하면

$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$

실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

판별식 $\dfrac{D}{4} \leq 0$이거나,

$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.

따라서 $a \geq 4$

19. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4=4k^2-(5-k^2)\geq 0$

$4k^2-5+k^2\geq 0,\ 5k^2\geq 5,\ \therefore k^2\geq 1$

$\alpha+\beta=4k,\quad \alpha\beta=5-k^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\ &= 16k^2-10+2k^2\\ &= 18k^2-10\end{aligned}$$

$18k^2\geq 18,\ 18k^2-10\geq 18-10$

$\alpha^2+\beta^2\geq 8,\ \therefore$ (최솟값)$=8$

20. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 직선 $y = bx$가 만나는 두 교점을 P, Q라 한다. 점 P의 x좌표가 $2+\sqrt{3}$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{cases} y = x^2 - a \\ y = bx \end{cases}$$

$bx = x^2 - a$ $\therefore$ P, Q의 x좌표는 $x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
점 P의 x좌표가 $2+\sqrt{3}$이므로,
켤레근인 $2-\sqrt{3}$은 점 Q의 x좌표이다.
근과 계수와의 관계에 의해서
$b = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) = 4$
$-a = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$ $\therefore$ $a = -1$
$\therefore$ $a + b = (-1) + 4 = 3$

21. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned}P&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=\quad\vdots\\&=(2^{16}-1)(2^{16}+1)\\&=2^{32}-1\end{aligned}$$

22. 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$, $P(0)=0$을 만족한다. 2차 이하의 다항식 $P(x)$의 계수의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ 3 ⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$P(0)=0$에서 $c=0$ ∴ $P(x)=ax^2+bx$

$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$이므로

$a(x^2+1)^2+b(x^2+1)=(ax^2+bx)^2+1$

$ax^4+2ax^2+a+bx^2+b=a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=a^2,\ 2ab=0,\ 2a+b=b^2,\ a+b=1$

$a^2=a$와 $a+b=1$에서

$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$이 되는데

이 중 $(1,\ 0)$은 $2a+b=b^2$을 만족하지 않으므로 $(a,\ b)=(0,\ 1)$

즉, $P(x)=x$뿐이다.

∴ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$에서 $x=0$을 대입하면

$P(1)=\{P(0)\}^2+1$이 된다.

$P(1)=1$(∴ 모든 계수의 합은 $x=1$대입)

23. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_8 x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡

㉠ – ㉡ : $26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

24. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　　② $a = 1$ 또는 2　　③ $a = -1$ 또는 2

④ $a = 0$ 또는 1　　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x-1$ 또는 $x+1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

25. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

26. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x)=x^4-10x^2+9$, $B(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$, $C(x)=x(x-3)(x^2+a)-(x-3)(x^2+b)+8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ 2

해설

$A(x)=x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

$B(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$

$=(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$

$\therefore$두 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)(x-3)$

그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)$이다.

$\therefore$ 다항식 $C(\pm1)=0$

$\therefore\ C(1)=-a+b+4=0,\ C(-1)=a+b+4=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-4$에서 $a+b=-4$

27. 10 이하의 자연수 n에 대해, $\dfrac{(1+i)^{2n}}{2^n} = -1$ 을 만족하는 모든 n의 총합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$$\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} = \frac{\{(1+i)^2\}^n}{2^n} = \left(\frac{2i}{2}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이므로 $n = 4k+2(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

n이 10 이하의 자연수이므로 $n = 2, 6, 10$

$\therefore\ 2+6+10 = 18$

28. $z^2 = \sqrt{5}+i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x+yi$ ($x,\ y$ 는 실수) 로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5}+i$
$x^2-y^2+2xyi = \sqrt{5}+i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2-y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2$ 이므로

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2+4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$

$x^2+y^2>0$ 이므로 $x^2+y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5}+i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5}-i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

29. $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2\\ &=(w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2\\ &=(-w-2)^2+(w-1)^2\\ &=w^2+4w+4+w^2-2w+1\\ &=2w^2+2w+5\\ &=2(w^2+w+1)+3\\ &=3\end{aligned}$$

30. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha|=\frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$$

$$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$$

$$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$$

양변을 제곱하면

$$(p+4)^2-4(q-2)=4$$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

31. $x^2-x-1=0$일 때, $x^3-\dfrac{1}{x^3}$의 값과 $y+\dfrac{1}{y}=1$일 때, $\dfrac{y^{10}+1}{y^2}$의 값은?

① 4, -1　② 4, 18　③ 8, -1　④ 9, -1　⑤ 4, 27

해설

(1) $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x-1-\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore\ x-\frac{1}{x}=1$$

$$\therefore\ x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x\cdot\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=1^3+3\cdot1\cdot1=4$$

(2) $y+\dfrac{1}{y}=1$일 때

$y+\dfrac{1}{y}=1$에서 $\dfrac{y^2+1}{y}=1$

$\therefore\ y^2-y+1=0\cdots\cdots$㉠

양변에 $(y+1)$을 곱하면 $(y+1)(y^2-y+1)=0$

$y^3+1=0\ \therefore\ y^3=-1\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{y^{10}+1}{y^2}=\frac{(y^3)^3\cdot y+1}{y^2}=\frac{-y+1}{y^2}$$

$$=\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

32. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2