

1. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

2. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
 $x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$
 $m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$
 $\therefore m < 1, m > 5$

3. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i,$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (-i)^{50} + i^{50} - (-i)^{100} \\ &= \{(-i)^2\}^{25} + (i^2)^{25} - \{(-i)^2\}^{50} \\ &= -1 - 1 - 1 = -3 \end{aligned}$$

4. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하면?

① i

② 2

③ 1

④ 0

⑤ $2i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= -i, \quad \frac{1+i}{1-i} = i \\ f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) &= f(-i) - f(i) \\ &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000} \\ &= (-i)^{1000} - (i)^{1000} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

5. 이차방정식 $x^2 + (m + 1)x + (m + 4) = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m 의 범위는?
- ① $-5 < m \leq -3$ ② $-4 < m \leq -3$ ③ $-4 < m \leq -2$
④ $-4 < m \leq -1$ ⑤ $-4 < m \leq 0$

해설

두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = -(m + 1) \dots\dots\dots \textcircled{1}$
 $\alpha\beta = m + 4 \dots\dots\dots \textcircled{2}$
 $\alpha > 0, \beta > 0$ 이므로 $D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$
(i) $D \geq 0$
 $(m + 1)^2 - 4(m + 4) > 0$
 $m^2 - 2m - 15 \geq 0$
 $(m + 3)(m - 5) \geq 0$
 $m \leq -3$ 또는 $m \geq 5 \dots\dots \textcircled{3}$
(ii) $\alpha + \beta > 0$
 $\textcircled{1}$ 에서 $-(m + 1) > 0 \therefore m < -1 \dots\dots \textcircled{4}$
(iii) $\alpha\beta > 0$
 $\textcircled{2}$ 에서 $m + 4 > 0 \therefore m > -4 \dots\dots \textcircled{5}$
 $\therefore \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{5}$ 에서
 $-4 < m \leq -3$

6. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - 4k - 5 = 0$ 이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때, 상수 k 의 값의 범위는 $a < k < b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{9}{4}$ ⑤ $-\frac{11}{4}$

해설

$x^2 - 2kx + k^2 - 4k - 5 = 0$ 이 서로 다른 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k^2 - 4k - 5) = k^2 - k^2 + 4k + 5 > 0$$

$$\therefore k > -\frac{5}{4} \dots \textcircled{1}$$

두 근이 음수이므로

$$\text{두 근의 합 } 2k < 0 \quad \therefore k < 0 \dots \textcircled{2}$$

두 근의 곱은

$$k^2 - 4k - 5 > 0 \text{에서 } (k+1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < -1, k > 5 \dots \textcircled{3}$$

$\therefore \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의해

$$-\frac{5}{4} < k < -1$$

$$\therefore a = -\frac{5}{4}, b = -1$$

$$a + b = -\frac{5}{4} - 1 = -\frac{9}{4}$$

7. 방정식 $x^3 = 8$ 의 한 허근을 α 라 할 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$ 의 값은?

① $-1 \pm \sqrt{3}i$

② $1 \pm \sqrt{3}i$

③ $3 \pm \sqrt{3}i$

④ $6 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $9 \pm \sqrt{3}i$

해설

$\alpha^3 = 8$ 에서 $(\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4) = 0$,
 α 는 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$ 의 근이다.

$\therefore \alpha = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$

$= 1 + \alpha + (-2\alpha - 4) + 8$

$= 5 - \alpha$

$= 5 - (-1 \pm \sqrt{3}i)$

$= 6 \mp \sqrt{3}i$

8. 삼차방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$

② $\alpha + \bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha} = -1$

③ $\alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2$

④ $\frac{\alpha+1}{\alpha^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2+1} = 2$

⑤ $\alpha^2\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2 = 1$

해설

$$x^3 = -1, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\alpha^3 = \bar{\alpha}^3 = -1,$$

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = \bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha} + 1 = 0$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 1,$$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1$$

$$\textcircled{1} \alpha^2 + \alpha + 1 = 0(\bigcirc)$$

$$\textcircled{2} \alpha + \bar{\alpha} = 1(\times)$$

$$\textcircled{3} \alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = -1 - 1 = -2$$

$$\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = (\alpha + \bar{\alpha})^2 - 2 = -1(\times)$$

$$\textcircled{4} \frac{\alpha+1}{\alpha^2} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2+1}$$

$$= \frac{\alpha+1}{1-\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$$

$$= \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + 1 = \frac{2}{1-\alpha}(\times)$$

$$\textcircled{5} \alpha^2\bar{\alpha} + \alpha\bar{\alpha}^2$$

$$= \alpha\bar{\alpha}(\alpha + \bar{\alpha}) = 1(\bigcirc)$$