**1.** 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 $x$축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, $a, b$는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, $a, b$가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

**2.** 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 $m$ 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 $y$ 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

**3.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식})&=(-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\&=\{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\&=-1-1-1=-3\end{aligned}$$

**4.** $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1000}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하면?

① $i$ ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i,\ \frac{1+i}{1-i} = i$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) - f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$
$$= f(-i) - f(i)$$
$$= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000} - \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}$$
$$= (-i)^{1000} - (i)^{1000}$$
$$= 1 - 1$$
$$= 0$$

**5.** 이차방정식 $x^2+(m+1)x+(m+4)=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 $m$의 범위는?

① $-5<m\le -3$　② $-4<m\le -3$　③ $-4<m\le -2$

④ $-4<m\le -1$　⑤ $-4<m\le 0$

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-(m+1)\ \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=m+4\ \cdots\cdots$ ㉡

$\alpha>0,\ \beta>0$이므로 $D\ge 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

( i ) $D\ge 0$

$(m+1)^2-4(m+4)>0$

$m^2-2m-15\ge 0$

$(m+3)(m-5)\ge 0$

$m\le -3$ 또는 $m\ge 5\ \cdots$ ㉢

( ii ) $\alpha+\beta>0$

㉠에서 $-(m+1)>0\ \therefore m<-1\ \cdots$ ㉣

(iii) $\alpha\beta>0$

㉡에서 $m+4>0 \therefore m>-4\ \cdots$ ㉤

$\therefore$㉢, ㉣, ㉤에서

$-4<m\le -3$

**6.** $x$에 관한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-4k-5=0$이 서로 다른 두 음의 실근을 가질 때, 상수 $k$의 값의 범위는 $a<k<b$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{7}{4}$ ④ $-\frac{9}{4}$ ⑤ $-\frac{11}{4}$

해설

$x^2-2kx+k^2-4k-5=0$이 서로 다른 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k^2-4k-5)=k^2-k^2+4k+5>0$

$\therefore k>-\frac{5}{4}\cdots$ ㉠

두 근이 음수이므로

두 근의 합 $2k<0$ $\therefore k<0\cdots$ ㉡

두 근의 곱은

$k^2-4k-5>0$에서 $(k+1)(k-5)>0$

$\therefore k<-1,\ k>5\cdots$ ㉢

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$-\frac{5}{4}<k<-1$

$\therefore a=-\frac{5}{4},\ b=-1$

$a+b=-\frac{5}{4}-1=-\frac{9}{4}$

**7.** 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 $\alpha$라 할 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$의 값은?

① $-1 \pm \sqrt{3}i$ ② $1 \pm \sqrt{3}i$ ③ $3 \pm \sqrt{3}i$

④ $6 \pm \sqrt{3}i$ ⑤ $9 \pm \sqrt{3}i$

해설

$\alpha^3 = 8$에서 $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=0$,

$\alpha$는 $\alpha^2+2\alpha+4=0$의 근이다.

$\therefore\ \alpha = -1 \pm \sqrt{3}i$

이 때, $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3$

$= 1+\alpha+(-2\alpha-4)+8$

$= 5-\alpha$

$= 5-(-1 \pm \sqrt{3}i)$

$= 6 \mp \sqrt{3}i$

**8.** 삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 $\alpha$라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\overline{\alpha}$는 $\alpha$의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2-\alpha+1=0$

② $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=-1$

③ $\alpha^3+\overline{\alpha}^3=\alpha^2+\overline{\alpha}^2$

④ $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}=2$

⑤ $\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2=1$

해설

$x^3=-1,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\alpha^3=\overline{\alpha}^3=-1,$

$\alpha^2-\alpha+1=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+1=0$

$\alpha+\overline{\alpha}=1,$

$\alpha\overline{\alpha}=1$

①$\alpha^2+\alpha+1=0(\bigcirc)$

②$\alpha+\overline{\alpha}=1(\times)$

③$\alpha^3+\overline{\alpha}^3=-1-1=-2$

$\alpha^2+\overline{\alpha}^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2=-1(\times)$

④$\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}$

$=\dfrac{\alpha+1}{1-\alpha}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}$

$=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}+1=\dfrac{2}{1-\alpha}(\times)$

⑤$\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2$

$=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})=1(\bigcirc)$