1. $(x+y)^n$ 을 전개할 때 항의 개수는 $n+1$ 개이다. 다항식 $\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$ 을 전개할 때, 항의 개수를 구하면 ?

① 7 개 ② 8 개 ③ 12 개 ④ 13 개 ⑤ 64 개

해설

$\{(2a-3b)^3(2a+3b)^3\}^4$
$= \{(4a^2-9b^2)^3\}^4$
$= (4a^2-9b^2)^{12}$
$\therefore$ $(4a^2-9b^2)^{12}$ 의 항의 개수는 13 개이다.

2. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 $x - 2$, $x - 1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b라 할 때, $a + b$의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$f(x) = (x-2)Q(x) + a$

$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$

$f(2) = 4 = a,\ f(1) = -2 = b$

$\therefore a + b = 2$

3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x - 2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2) = 0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$
$\therefore\ k = 6$

4. $(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $x+y$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$(1-3i)x+(3+2i)y=1+8i$,
$(x+3y)+(-3x+2y)i=1+8i$ 에서
복소수의 상등에 의하여
$x+3y=1,\ -3x+2y=8$ 이고
연립하여 풀면 $y=1,\ x=-2$
$\therefore\ x+y=-1$

5. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　　② -4　　③ -2　　④ 5　　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$
$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$
$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$
(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로
x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$
(ii) 주어진 이차방정식이
허근을 갖기 위해서는
판별식 $D < 0$ 이어야 하므로
$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$
$37 + 12k < 0$
$\therefore k < -\frac{37}{12}$
따라서 최대정수는 -4 이다.

6. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

7. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$
$\quad = ax^2 - 4ax + 4a + 5$ 이므로
$b = -4a, \ -3 = 4a + 5$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, \ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

8. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times 2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$a=\dfrac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$

$=2013$ 이므로

$\therefore\ \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2013+1}{2013-1}=\dfrac{2014}{2012}=\dfrac{1007}{1006}$

9. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 5x - 3$이고 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x - 3$

해설

두 다항식을 $A,\ B$라고 하면

$A + B = (a + b)G,\ L = abG,$

즉, 최대공약수는 두 식의 합과 최소공배수의 공약수이다.

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$

$2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$

$\therefore\ G = x - 3$

10. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\ &= \{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\ &= -1-1-1=-3\end{aligned}$$

11. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α,β라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α,β이므로 근과계수와의 관계로부터
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$
2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$
$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

12. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설

한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

13. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + (m+4) = 0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m의 범위는?

① $-5 < m \le -3$　② $-4 < m \le -3$　③ $-4 < m \le -2$
④ $-4 < m \le -1$　⑤ $-4 < m \le 0$

해설

두 근을 α, β라 하면
$\alpha + \beta = -(m+1)$ ······㉠
$\alpha\beta = m + 4$ ······㉡
$\alpha > 0,\ \beta > 0$이므로 $D \ge 0,\ \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$
(i) $D \ge 0$
$(m+1)^2 - 4(m+4) > 0$
$m^2 - 2m - 15 \ge 0$
$(m+3)(m-5) \ge 0$
$m \le -3$ 또는 $m \ge 5$ ···㉢
(ii) $\alpha + \beta > 0$
㉠에서 $-(m+1) > 0$ $\therefore m < -1$ ···㉣
(iii) $\alpha\beta > 0$
㉡에서 $m + 4 > 0 \therefore m > -4$ ···㉤
∴㉢, ㉣, ㉤에서
$-4 < m \le -3$

14. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$

(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore x=1\pm i$

따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

15. 방정식 $x^3 = 8$의 한 허근을 α라 할 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$의 값은?

① $-1 \pm \sqrt{3}i$ ② $1 \pm \sqrt{3}i$ ③ $3 \pm \sqrt{3}i$
④ $6 \pm \sqrt{3}i$ ⑤ $9 \pm \sqrt{3}i$

해설

$\alpha^3 = 8$에서 $(\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4) = 0$,
α는 $\alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0$의 근이다.
$\therefore\ \alpha = -1 \pm \sqrt{3}i$
이 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$
$= 1 + \alpha + (-2\alpha - 4) + 8$
$= 5 - \alpha$
$= 5 - (-1 \pm \sqrt{3}i)$
$= 6 \mp \sqrt{3}i$