

1. $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4(2x - 1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^4 \cdot (2x - 1)^7$
 $= a_0x^{19} + a_1x^{18} + a_2x^{17} + \cdots + a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0 + a_1 + \cdots + a_{19}$ 는 양변에 $x = 1$ 을 대입한
결과와 같으므로 항등식의 성질에서
 $(1 + 2 - 3 + 2)^4 \cdot (2 - 1)^7 = 2^4 = 16$

2. x 에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

- ① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$ 을 전개하여 x 에 대한 내림차순으로 정리하면 $(4x^2-3x+1)^5=a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$ 과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ 을 구하려면 $x=1$ 을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

3. x 에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

4. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \cdot B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 한다. 다음 중 $(A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB)$ 와 같은 것은?

① 1 ② A ③ AB ④ AL ⑤ AG

해설

$A = aG, B = bG$ (a, b 는 서로소)라 하면

$$A^2 \cdot B^2 = a^2 G^2 \cdot b^2 G^2 = G^2$$

$$A^2 \cdot AB = a^2 G^2 \cdot ab G^2 = aG^2$$

$$\therefore (A^2 \cdot B^2) \star (A^2 \cdot AB) = G^2 \star aG^2 = aG^2 = AG$$

5. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A * B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 할 때, $(A^2 * B^2) \star (A^2 * AB)$ 와 같은 것은?

- ① AG ② A ③ AL ④ AB ⑤ I

해설

$$\begin{aligned} A &= Ga, \quad B = Gb(a, b \text{는 서로소}) \text{로 놓으면} \\ (A^2 * B^2) \star (A^2 * AB) \\ &= (G^2a^2 * G^2b^2) \star (G^2a^2 * G^2ab) \\ &= G^2 \star G^2a \\ &= G^2a \\ &= AG \end{aligned}$$

6. 두 다항식 A, B 의 최대공약수 G 를 $A \circ B$, 최소공배수 L 을 $A \star B$ 로 나타내기로 할 때, 다음 계산 과정의 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

$$\begin{aligned} A &= aG, B = bG \text{ (} a, b \text{ 는 서로소)} \\ A^2 \circ AB &= [(가)], A^2 \circ B^2 = [(나)] \\ \therefore (A^2 \circ AB) \star (A^2 \circ B^2) &= [(다)] \end{aligned}$$

- ① A, G^2, A

② aG^2, G, A

③ A, AB, AG
- ④ aG^2, G^2, AG

⑤ G, G, AB

해설

$$\begin{aligned} (가) &= A^2 \circ AB = (G^2a^2 \text{ 과 } G^2ab \text{ 의 최대공약수}) \\ &= aG^2 \\ (나) &= A^2 \circ B^2 = (G^2a^2 \text{ 과 } G^2b^2 \text{ 의 최대공약수}) \\ &= G^2 \\ (다) &= (A^2 \circ AB) \star (A^2 \circ B^2) \\ &= ((가) \text{ 와 } (나) \text{ 의 최소공배수}) = aG^2 = AG \end{aligned}$$

7. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서 $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$

이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때, x, y 가 실수이므로 $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{A},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 에서 $y = 2x$ 이고, 이것을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $x^2 = 1$

따라서, $x = 1$ 일 때 $y = 2, x = -1$ 일 때 $y = -2$

그러므로 x, y 의 값은 $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서 x, y 의 합은 $-3, 3$

8. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

㉠이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$

$\therefore xy = 1$

9. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서
 $(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$
 $(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$
 x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$
 $\therefore x = 2, y = -2$
 $\therefore xy = -4$

10. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $\frac{1}{2w^3+3w^2+4w}=aw+b$ 를 만족하는 실수 $a+b$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ 2 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w (허근)라 하고, $w^2+w+1=0$ 에서 양변에 $w-1$ 을 곱하면,

$$w^3-1=0 \quad \therefore w^3=1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2w^3+3w^2+4w} &= \frac{1}{3w^2+4w+1} \\ &= \frac{1}{3(w^2+w+1)+w-1} \\ &= \frac{1}{w-1} \\ &= \frac{w+2}{(w-1)(w+2)} \\ &= \frac{w^2+w-2}{w+2} \\ &= \frac{-3}{w+2} \\ &= -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore -\frac{1}{3}w - \frac{2}{3} = aw+b$ 에서

a, b 가 실수, w 는 허수이므로

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{2}{3} \quad \therefore a+b = -1$$

11. $x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$ 일 때, $3x^2 - 2x$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-i$

② -1

③ 0

④ 1

⑤ i

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{2}i}{3}$, $3x - 1 = -\sqrt{2}i$ 의 양변을 제곱하면

$9x^2 - 6x + 1 = -2$, $9x^2 - 6x = -3$

양변을 3으로 나누면

$\therefore 3x^2 - 2x = -1$

12. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

13. $x^2 + 3ax + b = 0$ 과 $x^2 - ax + c = 0$ 은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$ 가 최소가 되는 a 의 값은 ?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

조건에서

$$1 + 3a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - a + c = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : 4a + b - c = 0$$

$$\therefore b - c = -4a$$

$$\therefore 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a - 1)^2 - 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때, 최소이다.

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이 되도록 유리수 p, q 를 정할 때, $p + q$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면,
그 켤레근인 $2 - \sqrt{3}$ 도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
 $-p = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$
 $\therefore p = -4$
 $q = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$
 $\therefore q = 1$
 $\therefore p + q = -4 + 1 = -3$

15. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$ 에 $x=-1+\sqrt{2}$ 를 대입하여 정리하면
 $3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$
 $-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$
 $-a+b+3=0$ 과 $a-2=0$ 에서 $a=2, b=-1$