1. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿ 사분면

▷ 정답: 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots ㉠$

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

2. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$　　② $-\frac{1}{3}<m<1$

③ $-1<m<2$　　④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$

⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0\cdots$㉠

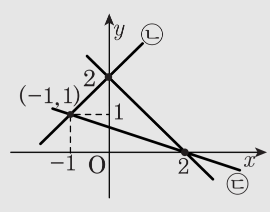
$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1,1)$을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$ 와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m 은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

3. 원점에서 직선 $3x-4y-5=0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0\times3+0\times(-4)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

4. 원점에서의 거리가 1이고, 점 $(1, 2)$를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$으로 표현될 때, $a + b + c$의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$를 지나는 직선은
$y = m(x - 1) + 2$ 에서,
$mx - y - m + 2 = 0 \cdots$ ㉠
여기서 $(0, 0)$에 이르는 거리가 1이므로
$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,\ |m-2| = \sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \frac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0$,
$3x - 4y + 5 = 0$
$\therefore\ a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

5. 방정식 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$ 이 원을 나타내도록 k 값의 범위를 정하면?

① $k<-2$ ② $k<-1$ ③ $k>-2$
④ $k<2$ ⑤ $k>1$

해설
방정식을 정리하면, $(x-1)^2+(y+1)^2=2-k$
원이 되려면 $2-k>0$ 을 만족해야 한다.
$\therefore\ k<2$

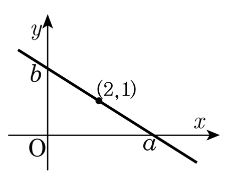
6. 원 $x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 이 점 $(-3,\ 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$
이 점 $(-3, 4)$ 를 지나므로
$9+16+6-16a+b=0$
$\therefore\ 16a-b=31\ \cdots\cdots$ ㉠
$x^2+y^2-2x-4ay+b=0$ 은
$(x-1)^2+(y-2a)^2=4a^2-b+1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
$2a=\sqrt{4a^2-b+1},\ 4a^2=4a^2-b+1$
$\therefore\ b=1\ \cdots\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $16a-1=31$
$\therefore\ a=2\qquad\therefore\ a+b=2+1=3$

7. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\frac{a}{2}=1$ ② $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$
③ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$ ④ $\frac{2}{a}+b=1$
⑤ $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이다.
따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$ 이다.

8. 두 직선 $y = 3x + 2$, $x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a 의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1 이다.

$\therefore\ 3 \times \frac{1}{a} = -1 \ \Rightarrow\ a = -3$

9. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1 - y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x + 2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$

$\therefore x = -2,\ y = 1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a = -2,\ b = +1$

$\therefore\ a + b = -1$

10. 모든 실수 k 에 대하여 직선 $(1+k)x+y-2k=0$ 에 대칭이고, 반지름의 길이가 3 인 원의 방정식을 구하면?

① $(x+2)^2+(y-2)^2=9$
② $(x-2)^2+(y+2)^2=9$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$
④ $(x+1)^2+(y+2)^2=9$
⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$

해설

$(1+k)x+y-2k=0$
$x+kx+y-2k=0$ (k 는 임의의 실수)
$x+y+k(x-2)=0$
이 직선은 항상 $(2,\ -2)$ 를 지난다.
따라서 이와 같은 모든 직선에 대칭인 원의 중심은 $(2,-2)$ 이다.
$\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=9$

11. 좌표평면 위의 두 점 $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
$a = -8,\ b = -6,\ c = 0$
$\therefore abc = 0$

12. 좌표평면 위의 두 점 $(2,\ 2)$, $(9,\ 9)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x좌표는 ?

① $\frac{9}{2}$　　② 5　　③ $\frac{11}{2}$　　④ 6　　⑤ $\frac{13}{2}$

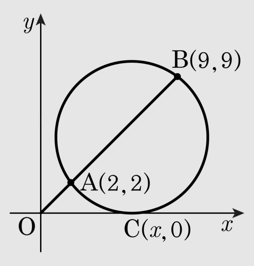
해설

다음 그림에서

$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ x^2 = \sqrt{2^2+2^2} \cdot \sqrt{9^2+9^2} = 36$

$\therefore\ x = 6$



13. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l, l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m, m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼
평행이동시킨 직선 l 은
l : $y = 2(x - \alpha) + 4$
이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은
m : $(-y) = 2(x - \alpha) + 4$
n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로
n : $(-y) = 2(-x - \alpha) + 4$
이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로
l 과 n이 일치하려면
$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4$ 가 되어 $\alpha = 2$ 이다.

14. 점 $(2,\ 1)$ 을 직선 $y = 2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$　② $\left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)$　③ $\left(-\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$
④ $\left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$　⑤ $\left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right)$

해설

대칭이동한 점의 좌표를 $(\alpha,\ \beta)$ 라 하자.
i) $(2,\ 1)$, $(\alpha,\ \beta)$ 를 잇는 선분의 기울기는 $y = 2x+1$ 와 수직이다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{\beta-1}{\alpha-2} \times 2 = -1 \quad \therefore \quad 2\beta+\alpha = 4$

ii) $(2,\ 1)$, $(\alpha,\ \beta)$ 의 중점은 $y = 2x+1$ 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{\beta+1}{2} = 2(\dfrac{\alpha+2}{2})+1$

$\therefore \quad 2\alpha-\beta+5 = 0$

i), ii) 를 연립하면, $\alpha = -\dfrac{6}{5}$ $\beta = \dfrac{13}{5}$

$\therefore$ 　대칭이동한 점은 $\left(-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

15. x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ $+$

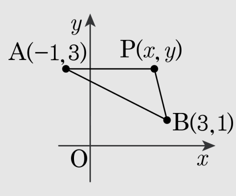
$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 의미 하므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{AB}}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$



16. 좌표평면 위의 두 점 $A(-2, 5)$, $B(6, -3)$을 잇는 선분 AB를 $t : (1-t)$로 내분하는 점이 제 1사분면에 있을 때, t의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{4}$　② $\frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$　③ $\frac{3}{8} < t < \frac{3}{4}$
④ $\frac{1}{2} < t < \frac{7}{8}$　⑤ $\frac{5}{8} < t < 1$

해설

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \cdot 6 + (1-t) \cdot (-2)}{t + (1-t)}, \frac{t \cdot (-3) + (1-t) \cdot 5}{t + (1-t)}\right) = (8t-2, 5-8t)$$

이 점이 제 1사분면에 있기 위해서는

$8t - 2 > 0$, $5 - 8t > 0$

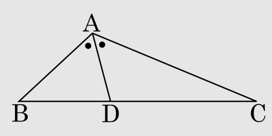
$\therefore \frac{1}{4} < t < \frac{5}{8}$

17. 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(-1,\ \sqrt{3})$, $C(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

① 1 : 2　② 1 : 3　③ 1 : 4　④ 2 : 3　⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로
$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$
$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$



18. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$ 을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y-1=0$ ③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$ ⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭) 하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭) 하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭) 하면 $2x+y+1=0$이므로
$A \to B \to C$, $C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭) 하면 $2y+x+1=0$
$\therefore x+2y+1=0$

19. 정점 A $(3, -1)$과 직선 $y = 3x + 1$ 위의 동점 P 를 잇는 선분 AP 를 $2:1$ 로 내분하는 점 Q 의 자취의 방정식은?

① $y = -x - 8$ ② $y = -3x + \frac{8}{3}$ ③ $y = \frac{3}{5}x - \frac{8}{5}$
④ $y = 3x - \frac{8}{3}$ ⑤ $y = 3x - 3$

해설

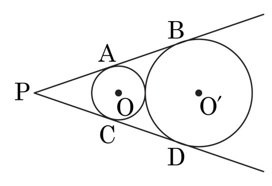
점 $P(a,\ 3a+1)$라 하고, $Q(x,\ y)$ 라 하면

$x = \frac{2a + 1 \times 3}{2+1}$, $y = \frac{2(3a+1) + 1 \times (-1)}{2+1}$

$\therefore x = \frac{2a+3}{3}$, $y = \frac{6a+1}{3}$

여기서 a를 소거하면 $y = 3x - \frac{8}{3}$

20. 다음 그림과 같이 외접하는 두 원 O, O′ 의 공통외접선의 교점을 P , 접점을 A, B, C, D 라고 하자. $\overline{PA} = \overline{AB} = 4\,\text{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하면?



① $\pi\,\text{cm}^2$　② $2\pi\,\text{cm}^2$　③ $3\pi\,\text{cm}^2$

④ $4\pi\,\text{cm}^2$　⑤ $5\pi\,\text{cm}^2$

해설

△POA 와 △PO′B 는 닮음이고 닮음비는 1 : 2 이다.

∴ $\overline{OA} = r$ 이라 하면, $\overline{O'B} = 2r$

다음 그림에서 $4^2 + r^2 = 9r^2$

$\Rightarrow\ r = \sqrt{2}$

∴ 원 O 의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$