

1. 다음은 $\frac{21}{120}$ 의 분모를 10의 거듭제곱 꼴로 고쳐서 소수로 나타내는 과정이다. A, B에 들어가는 수의 합을 구하여라.

$$\frac{21}{120} = \frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = \frac{7 \times A}{2^3 \times 5 \times B} = \frac{175}{1000} = 0.175$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$$\frac{21}{120} = \frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} = \frac{7 \times 5^2}{2^3 \times 5 \times 5^2} = \frac{175}{1000} = 0.175 \text{에서}$$

A, B에 들어가는 숫자는 각각 5²이다.

$$\therefore A + B = 50$$

2. $\frac{1}{6}$ 과 $\frac{3}{4}$ 사이의 분수 중에서 분모가 24이고 유한소수로 나타낼 수 있는 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$\frac{1}{6}$ 과 $\frac{3}{4}$ 의 분모를 24로 통분하면 $\frac{4}{24}$, $\frac{18}{24}$
 $\frac{4}{24} < \frac{x}{24} < \frac{18}{24}$

$24 = 2^3 \times 3$ 이므로 유한소수로 나타내려면 x 는 3의 배수이어야 한다. 즉, 6, 9, 12, 15로 4개이다.

3. 두 분수 $\frac{3}{168}, \frac{7}{220}$ 에 어떤 자연수 n 을 곱한 값은 모두 유한소수가 된다. n 이 500 이하의 자연수일 때, 이 조건을 만족하는 n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 462

해설

$$\frac{3}{168} \times n = \frac{3}{2^3 \times 3 \times 7} = \frac{1 \times n}{2^3 \times 7}$$
$$\frac{7}{220} \times n = \frac{7 \times n}{2^2 \times 5 \times 11}$$

이 두수가 모두 유한소수가 되려면 분모에 2 나 5 이외의 소인수가 없어야 하므로 n 는 7 과 11 의 공배수, 즉 77 의 배수가 되어야 한다.

77 의 배수로서 500 이하의 자연수 중 가장 큰 수는 462 이다.

4. n 이 1 보다 큰 자연수일 때, $3^{n-1}(2^n + 2^{n+1})$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6^n

해설

$$3^{n-1} \cdot 2^n (1 + 2) = 3^{n-1} \cdot 2^n \cdot 3 = 3^n \cdot 2^n = 6^n$$

5. 다음 순환소수를 분수로 나타낸 것 중 옳은 것은?

① $0.\dot{4}\dot{0} = \frac{4}{9}$

② $1.\dot{2}\dot{5} = \frac{62}{45}$

③ $0.2\dot{7} = \frac{25}{99}$

④ $2.\dot{4} = \frac{11}{45}$

⑤ $0.2\dot{3} = \frac{7}{30}$

해설

① $0.\dot{4}\dot{0} = \frac{40}{99}$

② $1.\dot{2}\dot{5} = \frac{125 - 1}{99} = \frac{124}{99}$

③ $0.2\dot{7} = \frac{27 - 2}{90} = \frac{25}{90}$

④ $2.\dot{4} = \frac{24 - 2}{9} = \frac{22}{9}$

⑤ $0.2\dot{3} = \frac{23 - 2}{90} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$

6. 서로 다른 세 자연수 x, y, z 에 대하여 $[x, y, z] = 0.x + 0.0\dot{y} + 0.00\dot{z}$ 라고 정의할 때, $[3, 4, 5] = 315 \times a$ 로 나타내어진다. 이때, a 의 값을 순환소수로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $0.00\dot{1}$

해설

$$\begin{aligned} [3, 4, 5] &= 0.3 + 0.0\dot{4} + 0.00\dot{5} \\ &= \frac{3}{10} + \frac{4}{90} + \frac{5}{900} \\ &= \frac{270 + 40 + 5}{900} \\ &= 315 \times \frac{1}{900} \\ &= 315 \times 0.00\dot{1} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 0.00\dot{1}$$

7. $a \odot b$ 를 $\begin{cases} a \neq b \text{이면 } 1 \\ a = b \text{이면 } 0 \end{cases}$ 이라 할 때, $a = 0.29, b = \frac{1}{45}, c = \frac{3}{10}, d = 0.\dot{0}2$ 에 대하여 $(a \odot c) \odot (b \odot d)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

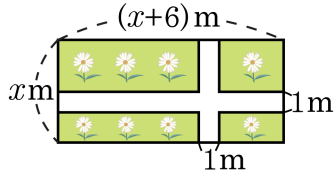
▷ 정답 : 1

해설

$$a = c = \frac{3}{10}, b = \frac{1}{45} \neq d = \frac{2}{99}$$

$$(a \odot c) \odot (b \odot d) = 0 \odot 1 = 1$$

8. 다음 그림은 직사각형 모양으로 생긴 꽃밭에 폭이 1m 인 길을 만든 것이다. 길을 내고 난 꽃밭의 넓이를 x 를 사용하여 나타내면?



- ① $x^2 + 2x + 1$ ② $3x + 2$ ③ $x^2 - 2x - 3$
④ $x^2 + 3x - 2$ ⑤ $x^2 + 4x - 5$

해설

$$(x + 5)(x - 1) = x^2 + 4x - 5$$

9. $10^n = A$ 라 할 때, $5^n(2^{n+2} + 2^n)$ 을 A 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $5A$

해설

$$\begin{aligned} 5^n(2^{n+2} + 2^n) &= 5^n(2^n \times 2^2 + 2^n) \\ &= 5^n(4 \times 2^n + 2^n) \\ &= 5^n(5 \times 2^n) \\ &= 5 \times 2^n \times 5^n \\ &= 5 \times (2 \times 5)^n \\ &= 5 \times 10^n \\ &= 5A \end{aligned}$$

10. $3^{2009} + 7^{2009}$ 을 10 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ 을 10 으로 나눈 나머지는
 $3, 9, 7, 1, \dots$ 과 같이 반복되고,
 $7, 7^2, 7^3, 7^4, \dots$ 을 10 으로 나눈 나머지는
 $7, 9, 3, 1, \dots$ 과 같이 반복된다.
 $2009 = 4 \times 502 + 1$ 이므로 3^{2009} 을 10 으로 나눈 나머지는 3 을
10 으로 나눈 나머지 3과 같고,
 7^{2009} 을 10 으로 나눈 나머지는 7 을 10 으로 나눈 나머지 7 과
같다.
따라서 $3^{2009} + 7^{2009}$ 을 10 으로 나누면 $3 + 7 = 10$ 에서 나머지는
0 이다.

11. $625^{x-1} = 5^{2x} \times 125^6 \div 25^3$ 을 만족하는 정수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$625 = 25^2 = (5^2)^2 = 5^4$, $125 = 5^3$ 이므로
주어진 식을 밑이 5 인 거듭제곱꼴의 형태로 바꾸어 주면
 $625^{x-1} = 5^{2x} \times 125^6 \div 25^3$
 $(5^4)^{x-1} = 5^{2x} \times (5^3)^6 \times (5^2)^{-3}$
 $5^{4x-4} = 5^{2x} \times 5^{18} \times 5^{-6}$
 $5^{4x-4} = 5^{2x+12}$
밑이 5 로 같으므로 양변의 지수가 같다.
 $4x - 4 = 2x + 12$
 $\therefore x = 8$

12. $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 - 2y^2}{xy}$ 의 값은?

① $-\frac{13}{3}$

② $-\frac{12}{5}$

③ $\frac{7}{3}$

④ $-\frac{16}{3}$

⑤ $-\frac{17}{3}$

해설

$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 1 : 3$, $\frac{3}{x} = \frac{1}{y}$ 이므로 $x = 3y$ 이다.

$$\frac{x^2 - 2y^2}{xy} = \frac{x}{y} - \frac{2y}{x} = \frac{3y}{y} - \frac{2y}{3y} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

13. 두 수 a, b 에 대하여 연산 $\bullet, \odot$ 를 $a \bullet b = (a^2b)^2$, $a \odot b = ab^2$ 으로 정의한다. 이 때, 다음을 만족하는 A, B 에 대하여 $A^2 \div B$ 의 값을 구하여라.

$x \bullet A = (3x^2y)^2$, $B \odot 5y = (10xy^2)^2$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{9}{4x^2}$

해설

$a \bullet b = (a^2b)^2$ 임으로 $x \bullet A = (3x^2y)^2$ 는 $x \bullet A = (x^2 \times A)^2 = (x^2 \times 3y)^2$ 으로 나타낼 수 있다.

따라서 $A^2 = 9y^2$ 임을 알 수 있다.

마찬가지로 $a \odot b = ab^2$ 이므로 $B \odot 5y = (10xy^2)^2$ 는 $B \odot 5y = B \times (5y)^2 = (100x^2y^4) = 4x^2y^2 \times (5y)^2$ 이다.

따라서 $B = 4x^2y^2$ 이다.

그러므로 $A^2 \div B = 9y^2 \div (4x^2y^2) = \frac{9}{4x^2}$ 이다.

14. $a = 8^2$, $b = 9^4$ 이라 할 때, $(a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5} = 2^n \times 3^m$

이 성립한다. 이때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$(a^{-1}b^2)^3 \div \left\{ \left(\frac{1}{ab} \right)^3 \right\}^2 \times a^4b^{-5}$$

$$= 2^n \times 3^m$$

$$= a^{-3}b^6 \times a^6b^6 \times a^4b^{-5}$$

$$= \frac{b^6}{a^3} \times a^6b^6 \times \frac{a^4}{b^5} = (ab)^7$$

따라서 $a = 8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $b = 9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ 을 주어진 식에 대입하면

$$(ab)^7 = (2^6 \times 3^8)^7 = 2^{42} \times 3^{56}$$

따라서 $n = 42$, $m = 56$ 이므로 $m - n = 14$ 이다.

15. 다음 □ 안에 알맞은 식을 써넣어라.

$$\square \times 3a^3b^2 \div (-ab^2)^3 = \frac{6a^3}{b^2}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-2a^3b^2$

해설

$$\square = \frac{6a^3}{b^2} \times \frac{1}{3a^3b^2} \times (-a^3b^6) = -2a^3b^2$$

16. $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right) - \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) = ax^2 + bx + c$ 에서 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right) - \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x - 2 \\ &= -x^2 + x - 3 \\ & \text{이므로 } a + b + c = (-1) + 1 + (-3) = -3 \end{aligned}$$

17. $x - 4y - 5z = 3x - \{2y - (z - \square)\}$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 알맞은 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x + 2y + 6z$

해설

$$x - 4y - 5z = 3x - 2y + z - \square$$

$$\therefore \square = 3x - 2y + z - (x - 4y - 5z) = 2x + 2y + 6z$$

18. 두 순서쌍 $(a, b), (c, d)$ 에 대하여 $(a, b)(c, d) = ac + ad + bc + bd$ 로 정의한다. $(px, y)(qy, 3x) = -3x^2 + xy + 2y^2$ 일 때, 상수 p, q 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p = -1$

▷ 정답 : $q = 2$

해설

$$\begin{aligned}(px, y)(qy, 3x) &= pqxy + 3px^2 + qy^2 + 3xy \\ &= 3px^2 + (3 + pq)xy + qy^2\end{aligned}$$

따라서 $3px^2 + (3 + pq)xy + qy^2 = -3x^2 + xy + 2y^2$ 이므로
 $\therefore p = -1, q = 2$

19. 다음 중 계산 결과가 옳은 것은 모두 몇 개인지 구하여라.

- ㉠

$(-2xy^3) \times \frac{3}{2}x^3y = -3x^4y^4$
- ㉡

$-2^2x \times 3y = -12xy$
- ㉢

$x \times (2x^3)^2 = 2x^5$
- ㉤

$(3x)^2 \times (2x)^2 = 6x^4$
- ㉥

$\frac{1}{3}xyz \times \frac{3}{2}xyz^2 = \frac{1}{2}x^2y^2z^3$

▶ 답 : 3 개

▷ 정답 : 3개

해설

- ㉢

$x \times (2x^3)^2 = 4x^7$
- ㉤

$(3x)^2 \times (2x)^2 = 36x^4$

20. $12a^3 - 24a^2b$ 을 어떤 식으로 나눈 값이 $6a^2$ 이라 할 때, 어떤 식은?

① $a - 2b$

② $a - 4b$

③ $2a - 2b$

④ $2a - 4b$

⑤ $2a - 24b$

해설

어떤 식을 A 라 하면

$$6a^2 \times A = 12a^3 - 24a^2b$$

$$A = \frac{12a^3 - 24a^2b}{6a^2} = 2a - 4b$$

21. 수학자들은 연속하는 자연수의 제곱의 합으로 등식을 만드는 방법을 연구해왔다. 아래 식은 그러한 등식을 변형한 것이다. 등식이 성립하도록 빈칸에 계산 기호를 써넣어라.

$4^2 \square 5^2 \square 6^2 = 2^2 \square 1^2$

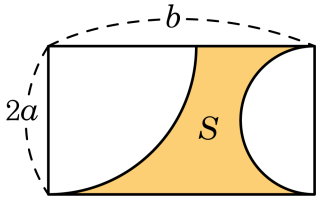
▶ 답 :

▷ 정답 : +, -, +

해설

$4^2 + 5^2 - 6^2 = 2^2 + 1^2$

22. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 S 라 할 때, S 의 값은? (단, S 가 아닌 부분은 각각 사분원과 반원이다.)



- ① $2ab - \frac{1}{2}a\pi$
- ② $2ab - a^2\pi$
- ③ $2ab - \frac{3}{2}a^2\pi$
- ④ $2ab - 2a^2\pi$
- ⑤ $2ab - \frac{5}{2}a^2\pi$

해설

$$\begin{aligned} S &= 2ab - \frac{1}{4} \times \pi \times (2a)^2 - \frac{1}{2} \times \pi \times a^2 \\ &= 2ab - a^2\pi - \frac{1}{2}a^2\pi \\ &= 2ab - \frac{3}{2}a^2\pi \end{aligned}$$

23. 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 $3a^2b$ 이고, 부피가 $18a^6b^3\pi$ 일 때, 높이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2a^2b$

해설

$$18a^6b^3\pi \div (3a^2b)^2\pi = 2a^2b$$

24. $\frac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5} = mx + n$ 일 때, 정수 m, n 의 값을 구하여라. (단, $x \neq -5$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 2$

▷ 정답 : $n = -3$

해설

$$\frac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5} = mx + n$$

양변에 $(x + 5)$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x - 15 &= (mx + n)(x + 5) \\ &= mx^2 + (5m + n)x + 5n \end{aligned}$$

따라서 $m = 2, n = -3$

25. $A = x^2 - x + 2$, $B = 3x^2 + x - 2$, $C = x^2 - 4x + 4$ 일 때, $3A - 2(A - B) + C$ 를 x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $8x^2 - 3x + 2$

해설

$3A - 2(A - B) + C = 3A - 2A + 2B + C = A + 2B + C$ A , B , C 를 대입하면

$$(x^2 - x + 2) + 2(3x^2 + x - 2) + (x^2 - 4x + 4)$$

$$= x^2 - x + 2 + 6x^2 + 2x - 4 + x^2 - 4x + 4$$

$$= 8x^2 - 3x + 2$$

26. $a = \frac{3x-y}{2}$, $b = \frac{x+y+1}{3}$ 일 때, $4ax-3by+1$ 을 x, y 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $6x^2 - 3xy - y^2 - y + 1$

해설

$$\begin{aligned} & 4ax - 3by + 1 \\ &= 4x \left(\frac{3x-y}{2} \right) - 3y \left(\frac{x+y+1}{3} \right) + 1 \\ &= 6x^2 - 2xy - xy - y^2 - y + 1 \\ &= 6x^2 - 3xy - y^2 - y + 1 \end{aligned}$$

27. 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ 모든 순환소수는 유리수이다.

㉡ 모든 유리수는 순환소수로만 나타낼 수 있다.

㉢ 기약분수를 소수로 고치면 모두 유한소수가 된다.

㉣ 모든 유한소수는 유리수이다.

㉤ 모든 정수는 순환소수로 나타낼 수 있다.

- ① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉣

③ ㉡, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉣, ㉤

해설

- ㉡ 유리수는 유한소수와 순환소수로 나누어진다.

㉣ 기약분수를 소수로 고치면 유한소수이거나 순환소수가 된다.

㉤ 0은 제외한다.

28. $7x - 3y - 2 = 4x - 2y - 5$ 일 때, $4x - \frac{1}{3}y - 7$ 을 x 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3x - 8$

해설

$7x - 3y - 2 = 4x - 2y - 5$, $y = 3x + 3$ 를 대입한다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 4x - \frac{1}{3}(3x + 3) - 7 \\ &= 4x - x - 1 - 7 = 3x - 8\end{aligned}$$

29. 자연수 n 에 대하여 a_n 을 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 의 일의 자리의 숫자라고 정의할 때, 소수 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 의 순환마디의 숫자의 갯수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 \text{의 일의 자리의 숫자}) = 5$
 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 20^2 \text{의 일의 자리의 숫자}) = 5$
따라서,
 $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 \text{의 일의 자리의 숫자}) = 0$ 이 되어
 $n = 21$ 이후로는 $1^2, 1^2 + 2^2, \cdots$ 의 일의 자리의 숫자가 다시 반복된다.
즉, $a_{21} = a_1, a_{22} = a_2, a_{23} = a_3, \cdots$ 이므로 소수 $0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$ 는 순환소수이고
순환마디는 $a_1a_2a_3\cdots a_{20}$ 의 20 개의 숫자이다.

30. $\frac{2}{x} = \frac{1}{y}$ 일 때, $(10xy - 15y^2) \div 5y^2$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -2

④ 1

⑤ 5

해설

$$(10xy - 15y^2) \div 5y^2 = \frac{2x}{y} - 3$$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{y}$ 은 $x = 2y$ 이므로 $\frac{4y}{y} - 3 = 1$ 이다.