1. 다음 $\boxed{}$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{}) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$\boxed{}x^2 + \boxed{}x + \boxed{} = A$라 하면

$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$

$\therefore\ A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

$\therefore\ A = x^2 + 2x - 1$이므로

$\boxed{}$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

2. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$
$= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1$
$= 7$

3. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$ 가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$라 놓으면

$2x+ay-b = k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

4. $(x^3 - x^2 - 2x + 1)^5 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{15}(x-1)^{15}$ 일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{14}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_{15} \cdots$ ㉠

양변에 $x = 2$를 대입하면

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \quad \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면

$2 = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_{14})$ 이다.

$\therefore\ a_0 + a_2 + \cdots a_{14} = 1$

5. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$
② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$
③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$
④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$
⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$라 하면
$f(1)=0, f(3)=0$이므로
$f(x)$는 $x-1, x+3$로 나누어떨어진다.
$\therefore\ f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$
$\quad\quad=(x^2+1)(x+3)(x-1)$

6. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$, 최소공배수가 x^3-kx+6일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-3x-5$　② $2x^2-3x+1$　③ $2x^2-x-1$
④ $2x^2+x-3$　⑤ $2x^2+2x-4$

해설

최소공배수는 최대공약수를 인수로 가지므로
$x=1$일 때 $1-k+6=0$　$\therefore k=7$
$x^3-7x+6=(x-1)(x-2)(x+3)$이므로
두 다항식은 $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x+3)$
$\therefore$ 두 다항식의 합은 $2x^2-x-1$

7. a가 실수일 때, $f(x)=x^2+2(a+1)x+a^2$, $g(x)=x^2+2ax+(a-1)^2$에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x)=0, g(x)=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$도 실근을 가진다.

② $f(x)=0$이 실근을 가지면 $g(x)=0$은 허근을 가진다.

③ $f(x)=0$이 허근을 가지면 $g(x)=0$도 허근을 가진다.

④ $g(x)=0$이 실근을 가지면 $f(x)=0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x)=0$과 $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1$,

$\frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a+1>2a-1$,

즉, $D_1>D_2$이므로 $D_1<0$이면 $D_2<0$

8. x에 관한 이차방정식$x^2+2(m+a+2)x+m^2+a^2-2b=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 상수의 a, b의 값을 정할 때. $a+b$의 값은?

① 0 ② 4 ③ 2 ④ -1 ⑤ -3

해설

중근 : $\frac{D}{4}=0$

m값에 관계없이 성립 : m에 대한 항등식

$\frac{D}{4}=(a+m+2)^2-(m^2+a^2-2b)=0$

$m\cdot(2a+4)+(4+4a+2b)=0$

$2a+4=0,\quad a=-2$

$4+4a+2b=0,\quad b=2$

$\therefore\ a+b=0$

9. x에 대한 다음 방정식의 두 근의 곱은?

$$2\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{3} = 0$$

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(2x - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1) = 0$

$\therefore\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

10. 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근 α, β에 대하여 $(1+\alpha)(1+\beta)=2$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$인 관계가 성립한다고 할 때, $2p-q$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 4　　④ 6　　⑤ 8

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$

$(1+\alpha)(1+\beta)=2$에서

$1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta=2$

$\therefore\ 1-p+q=2 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{2}{3}$에서

$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-p}{q}=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ p=\frac{2}{3}q \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $p=2,\ q=3$

$\therefore\ 2p-q=1$

11. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3 - 2i,\ 3 + 2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2 - i,\ 2 + i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $= \frac{c}{a} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 4 = 13$
성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.
두 근의 합$= -\frac{b}{a} = 2 - i + 2 + i = 4$
$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right| = \left|\frac{b}{a} \times \frac{c}{a}\right| = |-4 \times 13| = |-52| = 52$

12. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -15　② -10　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 이므로 켤레근은 $1-\sqrt{2}i$
세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma=3$ 이므로, $\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$
라 하면, $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\cdot\gamma=3$
$3\cdot\gamma=3$
$\gamma=1$
$\alpha+\beta+\gamma=-a=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1=3$
$a=-3$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta=b=3+(1-\sqrt{2}i)\cdot 1+1\cdot(1+\sqrt{2}i)=5$
$b=5$
$\therefore\ ab=(-3)\cdot 5=-15$

13. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, R ③ $Q(x)$, $3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

14. $a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$a = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2a+1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2+4a+1 = -3 \quad \Rightarrow \quad a^2+a+1=0$

양변에 $a-1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1) = 0 \Leftrightarrow a^3-1=0$

$\therefore\ a^3 = 1$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= a^3a^2 + a^3 - 1 \\
&= a^2 \\
&= -a-1 (\because a^2+a+1=0) \\
&= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$

15. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음 <보기> 에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1　　㉡ -1　　㉢ i　　㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$

$=1$

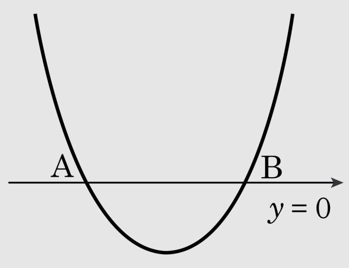
i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

16. 이차함수 $y = x^2+ax+a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설



A(α, 0) B(β, 0) 이라고 하면 ($\therefore$ $\alpha < \beta$)

$\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = a$ 이므로

($\therefore$ $y = x^2 + ax + a$)

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$

$\overline{\mathrm{AB}} = \beta - \alpha = 2\sqrt{3}$ 이므로

$a^2 - 4a = 12$

$(a - 6)(a + 2) = 0$

$\therefore$ $a = -2,\ 6$

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2 = 4a - 4$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$

$a = \frac{3}{2},\ b = -9,\ c = \frac{19}{2}$

$\therefore\ a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$

18. A, B 두 사람이 어떤 물건을 3 개월 할부로 공동 구입하였다. 첫달에 A, B 중 한 사람이 다른 사람보다 돈을 많이 지불하였기 때문에 두 번째 달부터는 전달에 많이 지불한 사람은 전달보다 20 % 적은 금액을 지불하고, 적게 지불한 사람은 전 달보다 3000 원 많은 금액을 지불하기로 하였다. 금액을 모두 지불하고보니 A, B는 전체 액수의 반씩을 부담하게 되었다. 이 물건을 사는 데 든 비용은 전부 얼마인가? (단, 두 번째 달의 B의 지불금액은 A의 지불금액보다 6000 원이 많았다.)

① 27000 원　② 30000 원　③ 81000 원

④ 162000 원　⑤ 570000 원

해설

첫달에 A, B가 지불한 금액을 각각 x원, y원이라 하면 각자가 지불한 금액의 총합은 다음과 같다.

$A : x + 0.8x + (0.8x + 3000)$

$B : y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000)$

따라서 $x + 0.8x + (0.8x + 3000) = y + (y + 3000) + 0.8(y + 3000) \cdots\cdots$ ㉠

$0.8x + 6000 = y + 3000 \cdots\cdots$ ㉡

또, ㉠, ㉡에서 $x = 30000$, $y = 27000$

따라서, A가 지불한 금액은

$30000 + 0.8 \times 30000 + 0.8 \times 30000 + 3000 = 81000$

그런데 물건을 사는 데 든 총 비용은 한 사람이 지불한 금액의 2 배이다.

$\therefore$ (지불한 총 금액)$= 81000 \times 2 = 162000$(원)

19. 방정식 $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+5=0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$ …… ㉠
이 때, x 가 실수이므로
$\frac{D}{4}=(1-y)^2-(2y^2-6y+5)\ge 0$
$y^2-4y+4\le 0,\ (y-2)^2\le 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2=0$
$\therefore\ y=2$ ……㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$
$\therefore\ x=1\ \therefore\ \frac{y}{x}=\frac{2}{1}=2$

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$
$x^2+2(1-y)x+(1-y)^2+y^2-4y+4=0$
$\therefore\ (x+1-y)^2+(y-2)^2=0\ x,\ y$ 가 실수이므로 $x+1-y=0,\ y-2=0$
$\therefore\ x=1,\ y=2$
$\therefore\ \frac{y}{x}=2$

20. $A=\left\{x+yi \mid x^2+y^2=2,\ x,\ y\text{는 실수}\right\}$이다.
$z=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}i$ (단, a : 실수) 일 때, $\dfrac{1}{z}\in A$가 되는 복소수 z는 2개가 있다. 이들의 곱을 구하면?

① $2i$　② $-2i$　③ $\dfrac{1}{2}i$　④ $-\dfrac{1}{2}i$　⑤ $\dfrac{3}{2}i$

해설

$z=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}i=\dfrac{1+i}{2a}$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{2a}{1+i}=a(1-i)=a-ai$

$a-ai\in A$이므로 $a^2+a^2=2\quad\therefore\ a=\pm 1$

$\therefore\ z=\dfrac{1+i}{2a}$에서 $z=\dfrac{1+i}{2},\ -\dfrac{1+i}{2}$

$\therefore$ 이들의 곱은 $-\dfrac{i}{2}$