

1. $x^2 - 3x + 9y^2 + 9y - 6xy + 2$ 를 인수분해하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x - 3y - 1)(x - 3y - 2)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^2 - 6xy + 9y^2 - 3x + 9y + 2 \\ &= (x - 3y)^2 - 3(x - 3y) + 2 \\ &= (x - 3y - 1)(x - 3y - 2)\end{aligned}$$

2. $[a, b, c] = (-a+b)(-a+c)$ 라 할 때, $[a, c, b] + [c, a, b]$ 를 인수분해 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(a-c)^2$

해설

$$\begin{aligned} & [a, c, b] + [c, a, b] \\ &= (-a+c)(-a+b) + (-c+a)(-c+b) \\ &= (a-c)(a-b-c+b) \\ &= (a-c)^2 \end{aligned}$$

3. $[a, b, c] = (a-b)(a-c)$ 라 할 때, $[a, b, c] - [b, a, c]$ 를 인수분해하면, $(xa + yb + zc)(pa + qb + rc)$ 이다. 이 때, $x + y + z + p + q + r$ 의 값은?

① -1

② 3

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (a-b)(a-c) - (b-a)(b-c) \\ &= (a-b)(a-c) + (a-b)(b-c) \\ &= (a-b)\{(a-c) + (b-c)\} \\ &= (a-b)(a+b-2c) \\ \therefore x+y+z+p+q+r \\ &= 1 + (-1) + 0 + 1 + 1 + (-2) = 0 \end{aligned}$$

4. $(x-1)^3 + (1-x)^3(1+x)^3 + x^3(x-1)^3$ 을 인수분해하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3x(x+1)(x-1)^3$

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)^3 + (1-x)^3(1+x)^3 + x^3(x-1)^3 \\ &= (x-1)^3 - (x-1)^3(1+x)^3 + x^3(x-1)^3 \\ &= (x-1)^3 \{1 - (x+1)^3 + x^3\} \\ &= (x-1)^3(-3x^2 - 3x) \\ &= -(x-1)^3(3x^2 + 3x) \\ &= -3x(x+1)(x-1)^3 \end{aligned}$$

5. 다음 식을 인수분해 하여라.
 $(2y-1)x^2-2xy^2+7xy-3x-3y(2y-1)$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(2y-1)(x+3)(x-y)$

해설

$$\begin{aligned} & (2y-1)x^2-2xy^2+7xy-3x-3y(2y-1) \\ &= (2y-1)x^2-(2y^2-7y+3)x-3y(2y-1) \\ &= (2y-1)x^2-(2y-1)(y-3)x-3y(2y-1) \\ &= (2y-1)(x^2-xy+3x-3y) \\ &= (2y-1)\{x(x-y)+3(x-y)\} \\ &= (2y-1)(x+3)(x-y) \end{aligned}$$

6. 두 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b 라 할 때, $ab - 3a - 4b + 12 > 0$ 일 확률을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{3}$

해설

$$ab - 3a - 4b + 12 = (a - 4)(b - 3) > 0 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \ a - 4 > 0, b - 3 > 0$$

$$\rightarrow a > 4, b > 3$$

$$(a, b) = (5, 4)(5, 5)(5, 6)(6, 4)(6, 5)(6, 6)$$

$$\textcircled{2} \ a - 4 < 0, b - 3 < 0$$

$$\rightarrow a < 4, b < 3$$

$$(a, b) = (1, 1)(1, 2)(2, 1)(2, 2)(3, 1)(3, 2)$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의해 나올 수 있는 경우의 수 : 12가지}$$

$$\text{주사위 2개를 던져서 나올 수 있는 경우의 수 : } 6 \times 6 = 36 \text{ 가지}$$

$$\text{이므로 구하는 확률은 } \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

7. 다음 식을 인수분해하여라.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\left(x - \frac{1}{x} - 2\right)^2$

해설

$$(\text{준식}) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$x - \frac{1}{x} = A$ 로 치환하면

$$A^2 - 4A + 4$$

$$= (A - 2)^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{x} - 2\right)^2$$

8. 다음은 인수분해 과정을 나타낸 것이다. 안에 들어갈 말을 차례대로 나열한 것은?

㉠ $2x^3 - 8x^2 - 10x = 2x(x^2 - 4x - 5)$
 $= 2x(x - 5)(\text{})$

㉡ $(x + y)^2 + 3(x + y) + 2$ 에서 를 A 로 치환한다.

- ① $x - 1, x - y$ ② $x - 1, x + y$ ③ $x + 1, x - y$
- ④ $x + 1, x + y$ ⑤ $x, x + y$

해설

㉠ $2x^3 - 8x^2 - 10x = 2x(x^2 - 4x - 5)$
 $= 2x(x - 5)(x + 1)$

9. $(a+4)^2 + 4 + \frac{4}{(a+4)^2}$ 를 인수분해 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\left(a+4+\frac{2}{a+4}\right)^2$

해설

$a+4=t$ 로 치환하면

$$(a+4)^2 + 4 + \frac{4}{(a+4)^2}$$

$$= t^2 + 2t \times \frac{2}{t} + \left(\frac{2}{t}\right)^2$$

$$= \left(t + \frac{2}{t}\right)^2$$

$$= \left(a+4+\frac{2}{a+4}\right)^2$$

10. 다음 식을 인수분해 하여라. (단, 정수 범위에서 인수 분해 하여라)

$$(2x^2 - 1)^2 - 12(2x^2 - 1) + 35$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $4(x^2 - 3)(x - 2)(x + 2)$

해설

$$\begin{aligned} & (2x^2 - 1)^2 - 12(2x^2 - 1) + 35 \\ &= (2x^2 - 1 - 5)(2x^2 - 1 - 7) \\ &= 4(x^2 - 3)(x^2 - 4) \\ &= 4(x^2 - 3)(x - 2)(x + 2) \end{aligned}$$

11. 다음 식을 인수분해하여라.

$$x^4 - 2x^2 - 13 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\right)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^2 - 13 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \\ &= x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 15 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 15 \\ & x^2 + \frac{1}{x^2} = A \text{ 로 치환하면} \\ & A^2 - 2A - 15 = (A - 5)(A + 3) \\ & \quad = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 3\right) \end{aligned}$$

12. $\frac{(a+1)^2 + (b+1)^2}{(a+1)(b+1)} = -2$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b = -2$

해설

$a+1 = A$, $b+1 = B$ 로 치환하면

$$\frac{(a+1)^2 + (b+1)^2}{(a+1)(b+1)} = \frac{A^2 + B^2}{AB} = -2$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = 0, (A+B)^2 = 0$$

$$A+B = a+b+2 = 0$$

$$\therefore a+b = -2$$

13. $(a + 2b - 1)(a - 2b - 1) + 4a$ 를 인수분해하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(a + 2b + 1)(a - 2b + 1)$

해설

$$\begin{aligned} a - 1 = t \text{라 하면} \\ (a + 2b - 1)(a - 2b - 1) + 4a \\ = (t + 2b)(t - 2b) + 4a \\ = t^2 - (2b)^2 + 4a \\ = a^2 - 2a + 1 + 4a - (2b)^2 \\ = a^2 + 2a + 1 - (2b)^2 \\ = (a + 1)^2 - (2b)^2 \\ = (a + 2b + 1)(a - 2b + 1) \end{aligned}$$

14. $(x + y + 4)(x - y + 4) - 16x$ 를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x - y + 4)$

② $(x + y - 4)^2$

③ $(x - y - 2)(x + y + 8)$

④ $(x + y - 4)(x - y - 4)$

⑤ $(-x - y + 4)(x - y + 4)$

해설

$$\begin{aligned}x + 4 &= t \text{ 라 하면} \\(t + y)(t - y) - 16x \\&= t^2 - y^2 - 16x \\&= (x + 4)^2 - 16x - y^2 \\&= (x^2 + 8x + 16 - 16x) - y^2 \\&= (x^2 - 8x + 16) - y^2 \\&= (x - 4)^2 - y^2 \\&= (x + y - 4)(x - y - 4)\end{aligned}$$

15. 다음 식을 인수분해하여라.

보기

$$x^2 - 2xy + y^2 - 7x + 7y + 12$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x - y - 4)(x - y - 3)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2xy + y^2 - 7x + 7y + 12 \\ &= (x - y)^2 - 7(x - y) + 12 \\ & x - y = A \text{로 치환하면,} \\ & A^2 - 7A + 12 \\ &= (A - 4)(A - 3) \\ &= (x - y - 4)(x - y - 3) \end{aligned}$$

16. 다음 식을 인수분해 하여라.

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x-3)(x-1)(x+1)(x+2)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \\ &= (x^4 - 7x^2 + 6) - (x^3 - x) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 6) - x(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x - 3)(x - 1)(x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

17. 다음 식을 인수분해 하여라.
 $a^2x^2 + a(bx^3 - 2x) - bx^2 + 1$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(ax - 1)(bx^2 + ax - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2x^2 + a(bx^3 - 2x) - bx^2 + 1 \\ &= a^2x^2 + abx^3 - 2ax - bx^2 + 1 \\ &= (ax - 1)bx^2 + (ax - 1)^2 \\ &= (ax - 1)(bx^2 + ax - 1) \end{aligned}$$

18. 다음 식을 인수분해 하여라.

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x+1)^2(x^2+2)$

해설

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ &= (x^4 + 3x^2 + 2) + (2x^3 + 4x) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 2) + 2x(x^2 + 2) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2) \\ &= (x + 1)^2(x^2 + 2) \end{aligned}$$

19. $a^3 - 4a + 3$ 을 인수분해 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(a^2 + a - 3)(a - 1)$

해설

$$\begin{aligned} & a^3 - 4a + 3 \\ &= a^3 - a^2 + a^2 - 4a + 3 \\ &= a^2(a - 1) + (a - 3)(a - 1) \\ &= (a^2 + a - 3)(a - 1) \end{aligned}$$

20. $2(x-3)^2 - 7(x-3)(2x+1) + 6(2x+1)^2$ 은 최고차항의 계수가 양수인 두 일차식의 곱으로 표현할 수 있다. 두 일차식의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $7x + 14$

해설

$x-3=A$, $2x+1=B$ 로 치환하면

$$2(x-3)^2 - 7(x-3)(2x+1) + 6(2x+1)^2$$

$$= 2A^2 - 7AB + 6B^2$$

$$= (A-2B)(2A-3B)$$

$$= (x-3-4x-2)(2x-6-6x-3)$$

$$= (-3x-5)(-4x-9)$$

$$= (3x+5)(4x+9)$$

따라서 두 일차식의 합은 $7x+14$

21. $2(x+2)^2 + (x+2)(3x-1) - (3x-1)^2 = -(ax+b)(cx+d)$ 일 때,
 $ab+cd$ 의 값을 구하면? (단, a, c 는 양수)

① -1 ② 3 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x+2=A$, $3x-1=B$ 로 치환하면
 $2A^2+AB-B^2=(2A-B)(A+B)$
 $=(2x+4-3x+1)(x+2+3x-1)$
 $=(x-5)(4x+1)$
 $\therefore ab+cd=1 \times (-5) + 4 \times 1 = -1$

22. 다음 식을 인수분해 하여라.

$$4x^2 - y^2 - 9z^2 - 6yz + 4x + 1$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(2x + y + 3z + 1)(2x - y - 3z + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & 4x^2 - y^2 - 9z^2 - 6yz + 4x + 1 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - (y^2 + 6yz + 9z^2) \\ &= (2x + 1)^2 - (y + 3z)^2 \\ &= (2x + y + 3z + 1)(2x - y - 3z + 1) \end{aligned}$$

23. $x^4 + 5x^2 + 9$ 를 인수분해 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 5x^2 + 9 &= x^4 + 6x^2 + 9 - x^2 \\&= (x^2 + 3)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)\end{aligned}$$

24. 다음 식을 인수분해 하여라.
 $x^2 + 2x - y^2 - z^2 + 2yz + 1$

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x + y - z + 1)(x - y + z + 1)$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x - y^2 - z^2 + 2yz + 1 \\ &= (x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 2yz + z^2) \\ &= (x + 1)^2 - (y - z)^2 \\ &= (x + y - z + 1)(x - y + z + 1) \end{aligned}$$

25. 다음은 $x^4 - 81y^4$ 을 인수분해 한 것이다. 이 때, $\square$ 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하면?

$$x^4 - 81y^4 = (x^2 + \square y^2)(x + \square y)(x - \square y)$$

- ① 13
- ② 15
- ③ 18
- ④ 20
- ⑤ 24

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 81y^4 &= (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2) \\ &= (x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y) \\ \therefore 9 + 3 + 3 &= 15 \end{aligned}$$

26. $x^{16} - 1$ 의 인수 $x^m + 1$ 에 대해 m 이 될 수 없는 것은?

① 1

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$x^{16} - 1$$

$$= (x^8 + 1)(x^8 - 1)$$

$$= (x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^4 - 1)$$

$$= (x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= (x^8 + 1)(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

이므로 m 이 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 8이다.

27. $16x^4 - 81y^4 = (Ax^2 + By^2)(Cx + Dy)(Ex + Fy)$ 라고 할 때, $A + B + C + D + E + F$ 의 값을 구하여라. (단, A, B, C, D, E, F 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$16x^4 - 81y^4 = (4x^2 + 9y^2)(2x + 3y)(2x - 3y)$ 이므로 $A + B + C + D + E + F = 4 + 9 + 2 + 3 + 2 - 3 = 17$ 이다.

28. $x^4 + 3x^2 + 4$ 를 인수분해 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 \\&= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

29. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)-40$ 이 $(x+a)(x+b)(x^2+c)$ 로 인수분해 될 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b+c=4$

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)-40 \\ &= (x^2-1)(x^2-4)-40 \\ &= x^4-5x^2-36 \\ &= (x^2+4)(x^2-9) \\ &= (x-3)(x+3)(x^2+4) \text{ 이므로} \\ & a+b+c=4 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

30. $x^4 - 3x^2 + 1$ 을 인수분해하면 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 가 된다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b + c + d = -2$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\&= (x^2 - 1 + x)(x^2 - 1 - x) \\&= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \\a = 1, b = -1, c = -1, d = -1 \\ \therefore a + b + c + d &= -2\end{aligned}$$

31. $\frac{2009^3 + 1}{2008 \times 2009 + 1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2010

해설

2009 = x 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 1}{(x - 1) \times x + 1} &= \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= x + 1 = 2009 + 1 = 2010\end{aligned}$$

32. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ 임을 활용하여, $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 - 19^2$ 을 계산하면?

- ① -100 ② -200 ③ -300 ④ -450 ⑤ -540

해설

$$\begin{aligned} & 1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + 13^2 - 15^2 + 17^2 - 19^2 \\ &= (1 - 3)(1 + 3) + (5 - 7)(5 + 7) + \cdots + (17 - 19)(17 + 19) \\ &= -2(1 + 3) - 2(5 + 7) - 2(9 + 11) - 2(13 + 15) - 2(17 + 19) \\ &= -2(1 + 3 + 5 + \cdots + 17 + 19) \\ &= -2 \times 5 \times 20 \\ &= -200 \end{aligned}$$

33. $A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2$, $B = 9945$ 라 할 때, $B^2 - A^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 98900000

해설

$$\begin{aligned} A &= -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 \\ &\quad - 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2 \\ &= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \\ &\quad (6^2 - 5^2) + (8^2 - 7^2) + (10^2 - 9^2) \\ &= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + (6-5) \\ &\quad (6+5) + (8-7)(8+7) + (10-9)(10+9) \\ &= 3+7+11+15+19 \\ &= 55 \\ \therefore B^2 - A^2 &= (B+A)(B-A) \\ &= (9945+55)(9945-55) \\ &= 10000 \times 9890 \\ &= 98900000 \end{aligned}$$

34. 인수분해를 이용하여 다음 식의 값을 구하면?

$$\sqrt{58^2 \times \frac{1}{16} - 42^2 \times \frac{1}{16}}$$

① 5

② 8

③ 10

④ 12

⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{58^2 \times \frac{1}{16} - 42^2 \times \frac{1}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}(58 - 42)(58 + 42)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16} \times 16 \times 100} = 10 \end{aligned}$$

35. $\frac{\sqrt{4^{11}-16^3}}{\sqrt{8^8-4^7}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4^{11}-16^3}}{\sqrt{8^8-4^7}} &= \frac{\sqrt{(2^2)^{11}-(2^4)^3}}{\sqrt{(2^3)^8-(2^2)^7}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{22}-2^{12}}}{\sqrt{2^{24}-2^{14}}} \\ &= \frac{\sqrt{2^{12}(2^{10}-1)}}{\sqrt{2^{14}(2^{10}-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

36. $44444444 - 8888$ 가 어떤 자연수의 제곱이 될 때, 어떤 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6666

해설

$$\begin{aligned} 4444 &= a \text{ 로 놓으면} \\ 44444444 &= 44440000 + 4444 = a \times 10^4 + a \text{ 이고 } 8888 = 2 \times 4444 = 2a \text{ 이므로} \\ 44444444 - 8888 &= a \times 10^4 + a - 2a \\ &= a \times 10^4 - a \\ &= a(10^4 - 1) \\ &= a \times 9999 \\ &= 4444 \times 9999 \\ &= 4 \times 1111 \times 9 \times 1111 \\ &= 36 \times 1111^2 \\ &= (6 \times 1111)^2 \end{aligned}$$

따라서 어떤 자연수는 6666 이다.

37. $\sqrt{18}$ 의 소수 부분을 a , $2\sqrt{5}$ 의 정수 부분을 b 라 할 때,
 $\frac{a^3 - b^3 + a^2b - ab^2}{a - b}$ 의 값을 구하면?

- ① 13 ② 15 ③ 18 ④ 20 ⑤ 24

해설

$$4 < \sqrt{18} < 5 \text{ 이므로 } a = \sqrt{18} - 4$$

$$4 < \sqrt{20} < 5 \text{ 이므로 } b = 4$$

$$a + b = \sqrt{18}$$

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2)}{a(a + b)(a - b) + b(a + b)(a - b)} \\ &= \frac{(a - b)(a + b)^2 - b}{a - b} \\ &= (a + b)^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

38. $x = \frac{1}{5-3\sqrt{3}}$ 일 때, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값으로 알맞은 것을 고르면?

① $\frac{130+75\sqrt{5}}{2}$
 ④ $\frac{130+75\sqrt{5}}{3}$

② $\frac{130+75\sqrt{3}}{2}$
 ⑤ $\frac{120+75\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{130-45\sqrt{3}}{2}$

해설

$$x = \frac{5+3\sqrt{3}}{(5-3\sqrt{3})(5+3\sqrt{3})} = \frac{5+3\sqrt{3}}{-2}$$

$$\frac{1}{x} = 5-3\sqrt{3},$$

$$x^2 = \frac{52+30\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{1}{x^2} = 52-30\sqrt{3}$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{260-90\sqrt{3}}{4} = \frac{130-45\sqrt{3}}{2}$$

39. $x = \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $24\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 3+2\sqrt{2}, \\ \frac{1}{x} &= 3-2\sqrt{2} \\ x^2 - \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= (3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}) \\ &= 6 \times 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2}\end{aligned}$$

40. $\sqrt{x} = p - 3$ 이고 $\sqrt{x + 12p} + \sqrt{x - 2p + 7} = 7$ 일 때, p 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 \leq p \leq 4$

해설

$\sqrt{x} = p - 3$ 에서 $\sqrt{x} \geq 0$ 이므로 $p \geq 3$

$\sqrt{x} = p - 3$ 의 양변을 제곱하면

$x = (p - 3)^2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{x + 12p} + \sqrt{x - 2p + 7} \\ &= \sqrt{(p - 3)^2 + 12p} + \sqrt{(p - 3)^2 - 2p + 7} \\ &= \sqrt{(p + 3)^2} + \sqrt{(p - 4)^2} = 7 \end{aligned}$$

i) $3 \leq p < 4$ 일 때

$$(p + 3) - (p - 4) = 7, 7 = 7 \text{로 항상 성립}$$

$$\therefore 3 \leq p < 4$$

ii) $p \geq 4$ 일 때

$$(p + 3) + (p - 4) = 7, 2p = 8$$

$$\therefore p = 4$$

i), ii)에서 $3 \leq p \leq 4$

41. 0 보다 큰 실수 a, b 에 대하여 $(a-1)^2 = (b+1)^2 = 2$ 일 때, $a^8 - b^8$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $816\sqrt{2}$

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로
 $(a-1)^2 = 2$ 에서 $a = \sqrt{2} + 1$
 $(b+1)^2 = 2$ 에서 $b = \sqrt{2} - 1$
따라서 $a+b = 2\sqrt{2}, a-b = 2, ab = 1$ 이므로
 $a^2 + b^2 = 8 - 2 = 6$
 $a^4 + b^4 = 36 - 2 = 34$
 $\therefore a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$
 $= 34 \times 6 \times 2\sqrt{2} \times 2 = 816\sqrt{2}$

42. $0 < n < 1$ 인 n 에 대하여 $x = n + \frac{1}{n}$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 4}$ 를 n 에 관한 식으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{n} - n$

해설

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 4} = \sqrt{\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$0 < n < 1 \text{ 이므로 } n - \frac{1}{n} < 0$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{n} - n$$

43. $x = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$ 일 때, $x^2 + 4x - 5$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $5 + \frac{7}{2}\sqrt{7}$

해설

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{3 + \sqrt{7}}{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \\x^2 + 4x - 5 &= (x - 1)(x + 5) \\&= \left(\frac{3 + \sqrt{7}}{2} - 1\right)\left(\frac{3 + \sqrt{7}}{2} + 5\right) \\&= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{7})(13 + \sqrt{7}) \\&= \frac{1}{4}(13 + \sqrt{7} + 12\sqrt{7} + 7) \\&= 5 + \frac{7}{2}\sqrt{7}\end{aligned}$$

44. $x - y = \sqrt{2}$ 일 때, $x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 2 &= (x - y)^2 + (x - y) - 2 \\&= (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} - 2 \\&= 2 + \sqrt{2} - 2 \\&= \sqrt{2}\end{aligned}$$

45. $b - a = \sqrt{3}$, $ab = 1$ 이고, $(b + a)b^2 - (a + b)a^2 = m\sqrt{3}$ 이라 할 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 7$

해설

$$\begin{aligned}(b + a)^2 &= (b - a)^2 + 4ab \\ &= (\sqrt{3})^2 + 4 = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b + a)b^2 - (a + b)a^2 &= (b + a)(b^2 - a^2) \\ &= (b + a)^2(b - a) \\ &= 7\sqrt{3} = m\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $m = 7$ 이다.

46. $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 일 때, $x^4 - x^2 - y^4 + y^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-20\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}+1}, y = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ 에서} \\ x &= \sqrt{2}-1, y = \sqrt{2}+1 \\ \therefore x^4 - x^2 - y^4 + y^2 \\ &= x^4 - y^4 - (x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) \\ &= \left\{ (\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}+1)^2 \right\} \\ &\quad \left\{ (\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2 - 1 \right\} \\ &= (-4\sqrt{2}) \times 5 \\ &= -20\sqrt{2} \end{aligned}$$

47. $ab = -4$, $(a + 2)(b + 2) = 10$ 일 때, $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2$ 의 값은?

① 121

② 134

③ 146

④ 152

⑤ 165

해설

$$(a + 2)(b + 2) = ab + 2(a + b) + 4 = 10$$

$$ab = -4 \text{ 를 대입하면 } a + b = 5$$

$$\text{한편 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \cdot (-4) = 33$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 &= a^2(a + b) + b^2(a + b) \\ &= (a^2 + b^2)(a + b) \\ &= 33 \times 5 \\ &= 165 \end{aligned}$$

48. $a - b = 5$, $ab = -6$ 일 때, $a^3 - b^3 - a^2b + ab^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 65

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - a^2b + ab^2 &= a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 \\ &= a^2(a - b) + b^2(a - b) \\ &= (a^2 + b^2)(a - b) \\ &= \{(a - b)^2 + 2ab\}(a - b) \\ &= \{5^2 + 2 \times (-6)\} \times 5 \\ &= 65 \end{aligned}$$

49. $a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ 일 때, $a^2 + 2ab + b^2$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ &= \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{2} \right)^2 = 4 \end{aligned}$$

50. $x = \sqrt{2} - 1$ 일 때, $6(x+2)^2 + 5(x+2) - 6 = a + b\sqrt{2}$ 이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a - b = 0$

해설

$6(x+2)^2 + 5(x+2) - 6$ 에서
 $x+2 = t$ 로 치환하면
 $6t^2 + 5t - 6 = (2t+3)(3t-2)$
 $t = x+2 = \sqrt{2} + 1$ 이므로 이를 대입하면
 $(2\sqrt{2} + 2 + 3)(3\sqrt{2} + 3 - 2)$
 $= (2\sqrt{2} + 5)(3\sqrt{2} + 1)$
 $= 12 + 17\sqrt{2} + 5 = 17 + 17\sqrt{2}$
따라서 $a = b = 17$ 이므로 $a - b = 0$

51. $x^3 - y^3 = -2$, $xy = -1$ 일 때, $x + y$ 의 값을 구하여라. (단, $x < y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = 0$

해설

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = -2$$

$xy = -1$ 을 대입하면

$$(x - y)^3 - 3(x - y) = -2,$$

$$(x - y)^3 - 3(x - y) + 2 = 0$$

$x - y = t$ 로 놓으면

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

이를 인수분해하면

$$t^3 - t^2 + t^2 - 3t + 2 = 0,$$

$$t^2(t - 1) + (t - 1)(t - 2) = 0$$

$$(t - 1)^2(t + 2) = 0$$

$$x - y = -2 \quad (\because x < y)$$

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy \text{ 이므로}$$

$$(x + y)^2 = (-2)^2 + 4(-1) = 0$$

$$\therefore x + y = 0$$

52. $a + b = 2, ab = -8$ 일 때, $a^3b + a^2b + ab^2 + ab^3$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -176

해설

$$\begin{aligned} & a^3b + a^2b + ab^2 + ab^3 \\ &= ab(a^2 + a + b + b^2) \\ &= ab\{(a + b)^2 - 2ab + a + b\} \\ &= (-8) \times \{2 - 2 \times (-8) + 2\} \\ &= (-8) \times (4 + 16 + 2) \\ &= -176 \end{aligned}$$

53. 세 자연수 x, y, z 에 대하여 $x + y + z + xy + yz + zx = 29 - xyz$ 일 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 21

해설

$x + y + z + xy + yz + zx = 29 - xyz$ 에서
 $xyz + x + y + z + xy + yz + zx = 29$
 $xy(z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + z = 29$
 $xy(z + 1) + y(z + 1) + x(z + 1) + (z + 1) = 30$
 $(z + 1)(xy + x + y + 1) = 30$
 $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = 30$
이때, x, y, z 는 자연수이고 $30 = 2 \times 3 \times 5$ 이므로
 $(x, y, z) = (1, 2, 4)$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 21$

54. $p^7 = 1$ 일 때, $(1-p) + (1-p^2) + (1-p^3) + \cdots + (1-p^6)$ 의 값을 구하여라. (단, $p \neq \pm 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} p^7 - 1 &= 0 \text{ 이므로} \\ (p-1)(p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) &= 0 \text{ 에서} \\ p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 &= 0 \text{ 이므로} \\ \therefore (1-p) + (1-p^2) + (1-p^3) + \cdots + (1-p^6) \\ &= 6 - (p^6 + p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p) \\ &= 6 - (-1) \\ &= 7 \end{aligned}$$