1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

2. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다.　　② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다.　　④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각
$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ (a, b 는 실수)라 하면
① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$
$\Leftrightarrow 2bi=0$
$\Leftrightarrow b=0$(참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$
④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$ (참)
⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

3. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

4. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 최솟값이 6 일 때 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 7$

해설

$y = x^2 + 2x + k = (x + 1)^2 - 1 + k$

$-1 + k = 6 \qquad \therefore \; k = 7$

5. $x+y=3, x\geq 0, y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

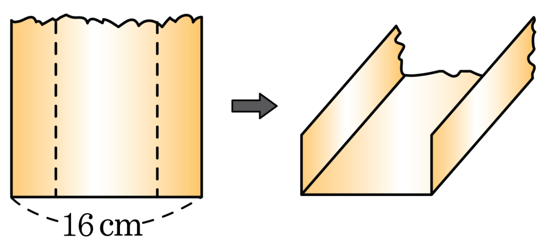
▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x\geq 0$
$\therefore\ 0\leq x\leq 3$
$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$
$x=1$ 일 때, $m=6$
$x=3$ 일 때, $M=18$
$\therefore\ M-m=12$

6. 다음 그림과 같이 너비가 16cm 인 철판의 양쪽을 접어 직사각형인 물받이를 만들었다. 단면의 넓이를 최대가 되게 하는 높이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 4 cm

해설

높이를 $x$cm, 넓이를 $y$cm^2 라고 두면

$y = x(16 - 2x)$

$= -2x^2 + 16x$

$= -2(x^2 - 8x + 16) + 32$

$= -2(x - 4)^2 + 32$ 이다.

따라서 $x = 4$ 일 때, 최댓값 32 를 가진다.

7. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2$(cm)

8. $x+y+2z=1$, $2x-y+z=5$를 만족하는 모든 실수 x, y, z에 대하여 $ax^2+by^2+cz^2=6$이 성립할 때, $3a+2b+c$의 값은 얼마인가?

① 12　② 8　③ 4　④ 0　⑤ -2

해설

$x+y+2z=1 \cdots$①

$2x-y+z=5 \cdots$②

①+②: $x+z=2 \Rightarrow z=2-x$

②×2−① : $x-y=3 \Rightarrow y=x-3$

$\therefore ax^2+by^2+cz^2=6$

$\Rightarrow ax^2+b(x-3)^2+c(2-x)^2$

$=(a+b+c)x^2-(4c+6b)x+9b+4c=6$

모든 실수 x, y, z에 대해 성립하려면

$a+b+c=0,\ 4c+6b=0,\ 9b+4c=6$

위의 식을 연립하여 풀면, $a=1,\ b=2,\ c=-3$

$\therefore\ 3a+2b+c=4$

9. 등식 $(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10} ② -2^9 ③ 0 ④ 2^9 ⑤ 2^{10}

해설

$(1+2x-x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로 x에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots$ ㉢

㉡ + ㉢을 하면

$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$\therefore\ a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$

10. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18) + 21x^2 \\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\} + 21x^2 \\ &= (x^2-18)^2 - 4x(x^2-18) - 21x^2 + 21x^2 \\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18,\ g = -4$

$\therefore pg = (-18) \times (-4) = 72$

11. $a^2 - b^2 = 1$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은? (단, n은 자연수)

① 2　　② $2(a+b)^n$　　③ 4

④ $4(a+b)^n$　　⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

12. $a+b+c=0$일 때, $\frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ac}+\frac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(\text{준식}) = \frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$

$= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

13. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 $2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$

$\therefore\ \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$

(준식) $= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) +$

$\cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2$

$= \alpha + \alpha^2$

$= -1$

$(\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

14. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 13

해설

α, β가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로
$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①
$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②
①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$
②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$
$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$
$=3\alpha\cdot 3\beta$
$=9\alpha\beta$
$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

15. 이차방정식 $ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근의 차가 $\sqrt{17}$이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① $-\dfrac{9}{4}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\dfrac{11}{4}$

해설

$ax^2+(a-3)x-2a=0$의 두 근을 α, β라 하면,

$\alpha+\beta=-\dfrac{a-3}{a}$, $\alpha\beta=-2$

문제의 조건에서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{17}$

$\therefore\ 17=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\left(\dfrac{a-3}{a}\right)^2+8$

$\therefore\ \left(\dfrac{a-3}{a}\right)^2=9$, $8a^2+6a-9=0$

따라서, a의 값들의 합은 $-\dfrac{3}{4}$

16. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x)=x^2+2x-8$, $g(x)=x^2-19$ 에 대하여 부등식 $(f\circ g)(x)\le 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=k$ 라고 하면

$(f\circ g)(x)\le 0 \Rightarrow f(k)\le 0$

$\Rightarrow -4\le k\le 2$

$\Rightarrow -4\le g(x)\le 2$

$\Rightarrow 15\le x^2\le 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x=4$

17. 부등식 $x^2-4x+3>0$과 $2x^2+(a-8)x-4a<0$을 동시에 만족하는 정수인 x의 값이 0뿐 일 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a \le 2$　② $0 \le a < 2$　③ $0 < a \le 2$
④ $-1 < a \le 0$　⑤ $-1 \le a < 0$

해설

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$

$\therefore\ x>3$ 또는 $x<1\cdots$①

$2x^2+(a-8)x-4a$

$=(2x+a)(x-4)<0$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$-\frac{a}{2}<4$

$\therefore\ -\frac{a}{2}<x<4\cdots$②

①과 ②에 의하여 $-1 \le -\frac{a}{2} < 0$

$\therefore\ 0<a\le 2$

18. 세 실수 a, b, c가 $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=9$, $a^3+b^3+c^3=24$를 만족시킬 때, $a^4+b^4+c^4+1$의 값을 구하면?

① 69　　② 70　　③ 71　　④ 72　　⑤ 73

해설

$a+b+c=3 \cdots$①
$a^2+b^2+c^2=9 \cdots$②
$a^3+b^3+c^3=24 \cdots$③ 이라 하면,
②식에서
$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=9$
$9-2(ab+bc+ca)=9$
$\therefore\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$④
③식에서
$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$24=3\cdot(9-0)+3abc$
$\therefore\ abc=-1 \quad \cdots$⑤
$a^4+b^4+c^4+1$
$=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+1$
$=81-2\cdot 6+1=70$
$(\because\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=0-2\times(-1)\times 3$
$=6)$

19. 복소수 z_k (k 는 자연수)를 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \bar{z}_1 + (1 - i)$, $z_3 = \bar{z}_2 + (1 - i), \cdots$ 와 같은 방법으로 정할 때, $\bar{z}_{100}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 은 z 의 켤레복소수)

① $50 + i$ ② $50 - i$ ③ $100 + 2i$

④ $100 - 2i$ ⑤ $200 + 4i$

해설

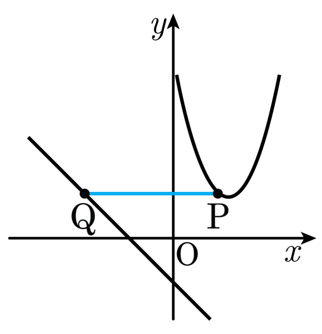
$z_1 = 1 + i,\ z_2 = (1 - i) + (1 - i) = 2 - 2i,$

$z_3 = 3 + i, z_4 = 4 - 2i, z_5 = 5 + i \cdots\cdots$

$\Rightarrow\ z_{2n+1} = (2n + 1) + i,\ \ z_{2n} = 2n - 2i$

$\therefore \bar{z}_{100} = 100 + 2i$

20. 다음 그림에서 포물선 $y=x^2-5x+8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y=-x-2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=x^2-5x+8$ 에서 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(a, a^2-5a+8)$
$y=-x-2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}(b,\ -b-2)$
점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로
$a^2-5a+8=-b-2,\ b=-a^2+5a-10$ 이다.
$\overline{\mathrm{PQ}}=a-b=a^2-4a+10=(a-2)^2+6$
$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 6 이다.

21. 이차함수 $y=-x^2+2mx+m$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$y=-x^2+2mx+m=-(x-m)^2+(m^2+m)$ 에서
위로 볼록이므로 최댓값은 m^2+m

$M=m^2+m=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

$\therefore M$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$

22. $x^4 - bx - 3 = 0$의 네 근을 a, b, c, d라고 할 때, $\frac{a+b+c}{d^2}, \frac{a+b+d}{c^2}, \frac{a+c+d}{b^2}, \frac{b+c+d}{a^2}$를 네 근으로 하는 방정식은?

① $3x^4 + bx + 2 = 0$
② $3x^4 - bx + 1 = 0$
③ $3x^4 + bx^3 - 1 = 0$
④ $3x^4 - bx^3 - 1 = 0$
⑤ $3x^4 + bx^3 - 2 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에서 $x^4 - bx - 3 = 0$의 네 근이 $a,\ b,\ c,\ d$이므로
$a + b + c + d = 0$

따라서,
$\frac{a+b+c}{d^2} = \frac{a+b+c+d-d}{d^2} = -\frac{1}{d}$

마찬가지로
$\frac{a+b+d}{c^2} = -\frac{1}{c}$,
$\frac{a+c+d}{b^2} = -\frac{1}{b}$,
$\frac{b+c+d}{a^2} = -\frac{1}{a}$

$f(x) = 0$의 근이 $a,\ b,\ c,\ d$이면
$-\frac{1}{a},\ -\frac{1}{b},\ -\frac{1}{c},\ -\frac{1}{d}$을 근으로 하는 방정식은
$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$이다.

$\therefore \left(-\frac{1}{x}\right)^4 - b\left(-\frac{1}{x}\right) - 3 = 0,$
$1 + bx^3 - 3x^4 = 0$
$\therefore 3x^4 - bx^3 - 1 = 0$

23. $\begin{cases} xy+3y-2z=0 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$ 이 연립방정식의 해 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x+y+z$의 값들을 작은 값부터 나열하여라. (단, $x,\ y,\ z$는 음이 아닌 정수)

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 19

▷ 정답: 20

▷ 정답: 23

해설

$\begin{cases} xy+3y-2z=0 \ \cdots \ ① \\ x+2y-z=-1 \ \cdots \ ② \end{cases}$

① $-2\times$ ② 하면

$xy+3y-2x-4y=2,\ xy-2x-y-2=0$

$x(y-2)-(y-2)=4,\ (x-1)(y-2)=4$

$x,\ y$는 음이 아닌 정수이므로

$(x-1,\ y-2)=(1,4),(2,2),(4,1)$

$\therefore\ (x,y,z)=(2,6,15),(3,4,12),(5,3,12)$

$\therefore\ x+y+z=19,\ 20,\ 23$

24. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 $a,\ b,\ c$ 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 8 + c \geq 9$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$

$c \geq 1$ 이므로 $10 > b > 6 + c \geq 7$

$\therefore\ b = 8$ 또는 9

1), 2) 에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3,\ b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

25. 출판사 영업부에 다니는 황영민 씨는 기본 월급 100 만원에 한 달간 도서 판매 금액의 3% 를 추가하여 월급을 받는다. 어느 달 황영민 씨가 가격이 각각 10000 원인 책 A 와 12000 원인 책 B 를 모두 합해 4000 권 팔아서 220 만원 이상, 230 만원 이하의 월급을 받았을 때, 판매한 책 B 의 최대 판매량을 구하여라. (단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답 : ______ 권

▷ 정답 : 1666 권

해설

책 B 의 판매량을 x 권이라 하면 책 A 의 판매량은 $4000 - x$ 권이므로

$$220 \le 100 + 1 \times \frac{3}{100}(4000 - x) + 1.2 \times \frac{3}{100}x \le 230$$

$$\therefore\ 0 \le x \le \frac{5000}{3}$$

따라서 책 B 의 최대 판매량은 1666 권