

1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

$$\text{㉡ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{결합법칙}$$

2. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $z + \bar{z}$ 는 실수이다.

② $z = \bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z} = 1$ 이면 $z^2 = 1$ 이다.

④ $z\bar{z} = 0$ 이면 $z = 0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각

$z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$ (a, b 는 실수)라 하면

① $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ (참)

② $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi$

$$\Leftrightarrow 2bi = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0 \text{ (참)}$$

③ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \neq 1$ (거짓)

(반례) $a = 0$, $b = 1$ 일 때, $z^2 = -1$

④ $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, $b = 0$ (참)

⑤ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (참)

3. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2, y = 4$$

$$\therefore x + y = 6$$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$$

$$y^2 - 8y + 16 \leq 0$$

$$(y - 4)^2 \leq 0, y = 4$$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$

4. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 최솟값이 6 일 때 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 7$

해설

$$y = x^2 + 2x + k = (x + 1)^2 - 1 + k$$

$$-1 + k = 6 \quad \therefore k = 7$$

5. $x + y = 3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M - m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$y = 3 - x \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 3$$

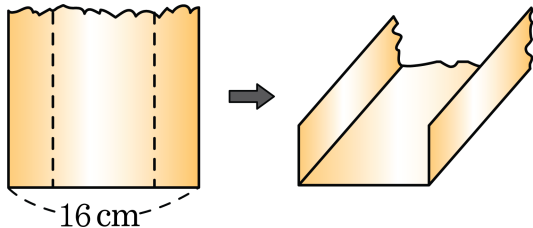
$$2x^2 + y^2 = 2x^2 + (3 - x)^2 = 3(x - 1)^2 + 6$$

$$x = 1 \text{ 일 때, } m = 6$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } M = 18$$

$$\therefore M - m = 12$$

6. 다음 그림과 같이 너비가 16cm 인 철판의 양쪽을 접어 직사각형인 물받이를 만들었다. 단면의 넓이를 최대가 되게 하는 높이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : 4cm

해설

높이를 x cm, 넓이를 y cm² 라고 두면

$$\begin{aligned} y &= x(16 - 2x) \\ &= -2x^2 + 16x \\ &= -2(x^2 - 8x + 16) + 32 \\ &= -2(x - 4)^2 + 32 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

따라서 $x = 4$ 일 때, 최댓값 32 를 가진다.

7. 어떤 정육면체의 밑변의 가로 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답: cm

▷ 정답: 2cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

$$\text{조건으로부터 } (x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3,$$

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3,$$

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0 \text{ 에서}$$

$$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0 \text{ 을 풀면 } x = 2(\text{cm})$$

8. $x + y + 2z = 1$, $2x - y + z = 5$ 를 만족하는 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$ 이 성립할 때, $3a + 2b + c$ 의 값은 얼마인가?

① 12

② 8

③ 4

④ 0

⑤ -2

해설

$$x + y + 2z = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x - y + z = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2}: x + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1}: x - y = 3 \Rightarrow y = x - 3$$

$$\therefore ax^2 + by^2 + cz^2 = 6$$

$$\Rightarrow ax^2 + b(x - 3)^2 + c(2 - x)^2$$

$$= (a + b + c)x^2 - (4c + 6b)x + 9b + 4c = 6$$

모든 실수 x, y, z 에 대해 성립하려면

$$a + b + c = 0, \quad 4c + 6b = 0, \quad 9b + 4c = 6$$

위의 식을 연립하여 풀면, $a = 1, b = 2, c = -3$

$$\therefore 3a + 2b + c = 4$$

9. 등식 $(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20}$ 의 값은?

① -2^{10}

② -2^9

③ 0

④ 2^9

⑤ 2^{10}

해설

$$(1 + 2x - x^2)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{20}x^{20} \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠은 x 에 대한 항등식이므로 x 에 어떤 실수 값을 대입해도 항상 성립한다.

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-2)^{10} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{19} + a_{20} \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡ + ㉢을 하면

$$2^{10} + (-2)^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$2 \times 2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{18} + a_{20} = 2^{10}$$

10. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\&= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2 \\&= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2 \\&= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2 \\&= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18, g = -4$

$$\therefore pq = (-18) \times (-4) = 72$$

11. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① 2

② $2(a+b)^n$

③ 4

④ $4(a+b)^n$

⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로

합차공식을 사용하여 정리하면

$$(\text{준식}) = 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2 - b^2)^n = 4$$

12. $a + b + c = 0$ 일 때, $\frac{a^2 + 1}{bc} + \frac{b^2 + 1}{ac} + \frac{c^2 + 1}{ab}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{a(a^2 + 1) + b(b^2 + 1) + c(c^2 + 1)}{abc} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc}\end{aligned}$$

그런데, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이므로

$$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3 + a + b + c}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

13. $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{14}$ 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{2}$

③ 0

④ $\frac{1}{2}$

⑤ 1

해설

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ 에서 } 2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \alpha^3 = 1$$

$$\therefore \alpha^{3k+1} = \alpha, \alpha^{3k+2} = \alpha^2, \alpha^{3k} = 1$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (\alpha + \alpha^2 + 1) + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \\ &\quad \cdots + (\alpha + \alpha^2 + 1) + \alpha + \alpha^2 \\ &= \alpha + \alpha^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$(\because \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$$

14. $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$ 의 값을 구하면?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 13

해설

α, β 가 $x^2 + (p-3)x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 + (p-3)\alpha + 1 = 0 \dots\dots ①$$

$$\beta^2 + (p-3)\beta + 1 = 0 \dots\dots ②$$

$$①\text{에서 } 1 + p\alpha + \alpha^2 = 3\alpha$$

$$②\text{에서 } 1 + p\beta + \beta^2 = 3\beta$$

$$\therefore (1 + p\alpha + \alpha^2)(1 + p\beta + \beta^2)$$

$$= 3\alpha \cdot 3\beta$$

$$= 9\alpha\beta$$

$$= 9 (\because \alpha\beta = 1)$$

15. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차이가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{9}{4}$

② $-\frac{3}{4}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{9}{4}$

⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

16. x 가 실수일 때, 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $g(x) = x^2 - 19$ 에 대하여 부등식 $(f \circ g)(x) \leq 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(x) = k$ 라고 하면

$$(f \circ g)(x) \leq 0 \Rightarrow f(k) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq k \leq 2$$

$$\Rightarrow -4 \leq g(x) \leq 2$$

$$\Rightarrow 15 \leq x^2 \leq 21$$

$\therefore$ 양의 정수 $x = 4$

17. 부등식 $x^2 - 4x + 3 > 0$ 과 $2x^2 + (a - 8)x - 4a < 0$ 을 동시에 만족하는 정수인 x 의 값이 0뿐 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a \leq 2$

② $0 \leq a < 2$

③ $0 < a \leq 2$

④ $-1 < a \leq 0$

⑤ $-1 \leq a < 0$

해설

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) > 0$$

$$\therefore x > 3 \text{ 또는 } x < 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x^2 + (a - 8)x - 4a$$

$$= (2x + a)(x - 4) < 0$$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$$-\frac{a}{2} < 4$$

$$\therefore -\frac{a}{2} < x < 4 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{에 의하여 } -1 \leq -\frac{a}{2} < 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 2$$

18. 세 실수 a, b, c 가 $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, $a^3 + b^3 + c^3 = 24$ 를 만족시킬 때, $a^4 + b^4 + c^4 + 1$ 의 값을 구하면?

① 69

② 70

③ 71

④ 72

⑤ 73

해설

$$a + b + c = 3 \cdots \textcircled{1}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 \cdots \textcircled{2}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 24 \cdots \textcircled{3} \text{ 이라 하면,}$$

②식에서

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 9$$

$$9 - 2(ab + bc + ca) = 9$$

$$\therefore ab + bc + ca = 0 \cdots \textcircled{4}$$

③식에서

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$24 = 3 \cdot (9 - 0) + 3abc$$

$$\therefore abc = -1 \cdots \textcircled{5}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + 1$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 1$$

$$= 81 - 2 \cdot 6 + 1 = 70$$

$$(\because a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$= (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)$$

$$= 0 - 2 \times (-1) \times 3$$

$$= 6)$$

19. 복소수 z_k (k 는 자연수) 를 $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \bar{z}_1 + (1 - i)$, $z_3 = \bar{z}_2 + (1 - i)$, $\dots$ 와 같은 방법으로 정할 때, $\bar{z}_{100}$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 은 z 의 켤레복소수)

① $50 + i$

② $50 - i$

③ $100 + 2i$

④ $100 - 2i$

⑤ $200 + 4i$

해설

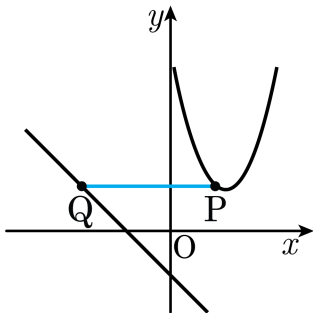
$$z_1 = 1 + i, z_2 = (1 - i) + (1 - i) = 2 - 2i,$$

$$z_3 = 3 + i, z_4 = 4 - 2i, z_5 = 5 + i \dots\dots$$

$$\Rightarrow z_{2n+1} = (2n + 1) + i, z_{2n} = 2n - 2i$$

$$\therefore \bar{z}_{100} = 100 + 2i$$

20. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 5x + 8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 - 5x + 8$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2 - 5a + 8)$

$y = -x - 2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b, -b - 2)$

점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로

$a^2 - 5a + 8 = -b - 2$, $b = -a^2 + 5a - 10$ 이다.

$\overline{PQ} = a - b = a^2 - 4a + 10 = (a - 2)^2 + 6$

$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 6 이다.

21. 이차함수 $y = -x^2 + 2mx + m$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{8}$

해설

$y = -x^2 + 2mx + m = -(x - m)^2 + (m^2 + m)$ 에서
위로 볼록이므로 최댓값은 $m^2 + m$

$$M = m^2 + m = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$\therefore M$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$

22. $x^4 - bx - 3 = 0$ 의 네 근을 a, b, c, d 라고 할 때,
 $\frac{a+b+c}{d^2}, \frac{a+b+d}{c^2}, \frac{a+c+d}{b^2}, \frac{b+c+d}{a^2}$ 를 네 근으로 하는 방
 정식은?

① $3x^4 + bx + 2 = 0$

② $3x^4 - bx + 1 = 0$

③ $3x^4 + bx^3 - 1 = 0$

④ $3x^4 - bx^3 - 1 = 0$

⑤ $3x^4 + bx^3 - 2 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에서 $x^4 - bx - 3 = 0$ 의

네 근이 a, b, c, d 이므로

$$a + b + c + d = 0$$

따라서,

$$\frac{a+b+c}{d^2} = \frac{a+b+c+d-d}{d^2} = -\frac{1}{d}$$

마찬가지로

$$\frac{a+b+d}{c^2} = -\frac{1}{c},$$

$$\frac{a+c+d}{b^2} = -\frac{1}{b},$$

$$\frac{b+c+d}{a^2} = -\frac{1}{a}$$

$f(x) = 0$ 의 근이 a, b, c, d 이면

$-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}, -\frac{1}{d}$ 을 근으로 하는 방정식은

$$f\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{x}\right)^4 - b\left(-\frac{1}{x}\right) - 3 = 0,$$

$$1 + bx^3 - 3x^4 = 0$$

$$\therefore 3x^4 - bx^3 - 1 = 0$$

23. $\begin{cases} xy + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$ 이 연립방정식의 해 x, y, z 에 대하여 $x + y + z$

의 값들을 작은 값부터 나열하여라. (단, x, y, z 는 음이 아닌 정수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

▷ 정답 : 20

▷ 정답 : 23

해설

$$\begin{cases} xy + 3y - 2z = 0 \cdots ① \\ x + 2y - z = -1 \cdots ② \end{cases}$$

① - 2 × ② 하면

$$xy + 3y - 2x - 4y = 2, xy - 2x - y - 2 = 0$$

$$x(y - 2) - (y - 2) = 4, (x - 1)(y - 2) = 4$$

x, y 는 음이 아닌 정수이므로

$$(x - 1, y - 2) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$\therefore (x, y, z) = (2, 6, 15), (3, 4, 12), (5, 3, 12)$$

$$\therefore x + y + z = 19, 20, 23$$

24. 백의 자리의 숫자의 2 배와 일의 자리의 숫자의 합은 십의 자리의 숫자보다 작고, 각 자리의 숫자가 모두 자연수인 세 자리 자연수 중 가장 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 392

해설

세 자리 자연수를 $N = 100a + 10b + c$ 라 하면 a, b, c 는 모두 0 보다 크고 10 보다 작은 자연수이고 $b > 2a + c$ 이다. 따라서 $10 > b > 2a + c$ 에서 $10 > 2a + c$, 이때, $c > 0$ 이므로 $a < 5$

1) $a = 4$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 4 + c = 8 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 8 + c \geq 9$$

그런데 $b > 9$ 일 수 없으므로 $a \neq 4$

2) $a = 3$ 일 때

$$10 > b > 2a + c = 2 \times 3 + c = 6 + c$$

$$c \geq 1 \text{ 이므로 } 10 > b > 6 + c \geq 7$$

$$\therefore b = 8 \text{ 또는 } 9$$

1), 2)에서 N 은 가장 큰 수이므로 $a = 3, b = 9$

$b > 2a + c$ 에서 $9 > 6 + c$, 즉 $c < 3$ 이므로 $c = 2$

따라서 구하는 세 자리의 자연수는 392 이다.

25. 출판사 영업부에 다니는 황영민 씨는 기본 월급 100 만원에 한 달간 도서 판매 금액의 3% 를 추가하여 월급을 받는다. 어느 달 황영민 씨가 가격이 각각 10000 원인 책 A 와 12000 원인 책 B 를 모두 합해 4000 권 팔아서 220 만원 이상, 230 만원 이하의 월급을 받았을 때, 판매한 책 B 의 최대 판매량을 구하여라. (단, 세금은 계산하지 않는다.)

▶ 답 : 권

▷ 정답 : 1666 권

해설

책 B 의 판매량을 x 권이라 하면 책 A 의 판매량은 $4000 - x$ 권이므로

$$220 \leq 100 + 1 \times \frac{3}{100} (4000 - x) + 1.2 \times \frac{3}{100} x \leq 230$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{5000}{3}$$

따라서 책 B 의 최대 판매량은 1666 권