1. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1 ② -1

③ $\sqrt{-1}$ ④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$

2. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right) + f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$

$= f(i^2) + f((-i)^2)$

$= f(-1) + f(-1)$

$= 0$

3. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i　② $-i$　③ $i,\ -i$　④ -1　⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로
$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1이 홀수 개가 있다.
(i) -1이 $4k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$개일 때
$$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$$
(ii) -1이 $4k+3$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$개일 때
$$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$$
따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

4. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$,

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\ &= \{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\ &= -1-1-1=-3\end{aligned}$$

5. $x=\dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x+x^2+x^3+\dots+x^{2006}+x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$ ② -1 ③ $-i$
④ 1 ⑤ i

해설

$x=\dfrac{1-i}{1+i}=-i \quad x^2=-1 \quad x^3=i \quad x^4=1$

$\therefore x+x^2+x^3+x^4=0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$\Rightarrow x+x^2+x^3+\cdots+x^{2006}+x^{2007}$

$=0+0+\cdots+x^{2005}+x^{2006}+x^{2007}$

$=(x^4)^{501}\cdot x+(x^4)^{501}\cdot x^2+(x^4)^{501}\cdot x^3$

$=-i-1+i$

$=-1$

6. n 이 자연수일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n+2}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ 의 값은?

① -2　② $-2i$　③ 0　④ 2　⑤ $2i$

해설

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이므로

(주어진 식) $=(-i)^{4n+2}+i^{4n}$

$=\left\{(-i)^4\right\}^n\cdot(-i)^2+(i^4)^n$

$1\cdot(-1)+1=0$

7. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

㉠ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

㉡ $z + \bar{z}$는 실수이다.

㉢ $z - \bar{z}$는 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉣　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

㉠ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

㉡ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

㉢ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

㉣ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

8. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음<보기>의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z+\bar{z}$ 는 실수이다.	㉡ $z\bar{z} > 0$
㉢ $z-\bar{z}$ 는 허수이다.	㉣ $z^2+\bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a+bi,\ \bar{z} = a-bi,\ (a,\ b$ 는 실수)
㉠ $z+\bar{z} = 2a$(실수)
㉡ $z\bar{z} = a^2+b^2 > 0$
㉢ $z-\bar{z} = 2bi$, $b=0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는 실수이다.
$ex)$ $z=3,\ \bar{z}=3,\ z-\bar{z}=3-3=0$
㉣ $z^2+\bar{z}^2 = 2(a^2-b^2) \rightarrow$ 우변이 0보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

9. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}i$

㉡ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha}^2+\alpha^2\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

㉣ $\alpha\overline{\beta}=1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}+\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㉠　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉣

④ ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉢, ㉣

해설

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\overline{\alpha}=a-bi$, $\overline{\beta}=c-di$ 라 하면

㉠ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{a+bi-(c+di)i}$

$=\overline{a+bi-ci-di^2}$

$=a+d-(b-c)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}i=(a-bi)-(c-di)i$

$=a-bi-ci+di^2$

$=a-d-(b+c)i$이므로 ㉠은 거짓

㉡ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{a+bi+c+di-1}$

$=\overline{(a+c-1)+(b+d)i}$

$=(a+c-1)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=a-bi+c-di+1$

$=(a+c+1)-(b+d)i$이므로

㉡은 거짓

10. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$이면 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.

㉡ $\alpha=\overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta=0$이면 $\alpha=0$이다.

㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.

㉣ $\alpha+\beta i=0$이면 $\alpha=0$, $\beta=0$이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha=\overline{\beta}$이므로 $\beta=a-bi$
$\therefore\ \alpha+\beta=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$
$\therefore\ \alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta=a^2+b^2=0$, a, b는
실수이므로 $a=0$, $b=0$ 즉, $=a+bi=0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha=i$, $\beta=1$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=i^2+1^2=0$
㉣ :(반례) $\alpha=1$, $\beta=i$
$\therefore\ \alpha+\beta i=0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

11. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ　⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$
$= a + 1 - (2 - a)$
$= 2a - 1 \neq 3$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0$, $a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$
$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

12. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i=\sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 이면, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.
㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.
㉣ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

① ㉡,㉢　　② ㉠,㉡,㉢　　③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡　　⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
㉠ $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2+b^2$
㉡ $\alpha\beta=0$, $a^2+b^2=0$, $a=0,\ b=0$
㉢ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$
㉣ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

13. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4\geq 0 \quad \therefore t^2\geq 4,\ t\leq -2$ 또는 $t\geq 2$

14. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$　② $k \leq 1$　③ $k < 3$
④ $k \leq 3$　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore\ k \leq 3$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6a+9$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

16. 방정식 $\left\{1+(a+b)^2\right\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면 ? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\left\{1+(a+b)^2\right\}\cdot 2\geq 0$

$-(a+b)^2-2(a+b)-1\geq 0$

양변에 -1을 곱하면

$(a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$

$\{(a+b)+1\}^2\leq 0$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\ &= (-1)^3-3ab(-1)-3ab\\ &= -1\end{aligned}$$

17. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\{1+(a+b)^2\}$

$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2 \geq 0$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1 \leq 0$

즉, $(a+b+1)^2 \leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

18. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$