1. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore\ j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

2. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$ 일 때, $f\left(\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f\left(\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right)+f\left(\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2\right)$$

$$=f(i^2)+f((-i)^2)$$

$$=f(-1)+f(-1)$$

$$=0$$

3. 2010개의 정수 $a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 은 모두 -1 또는 1이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이다. 이 때, $x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2009}} \cdot \sqrt{a_{2010}}$ 을 만족하는 x 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $i,\ -i$ ④ -1 ⑤ $-1, 1$

해설

$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2010} = -1$ 이므로

$a_1,\ a_2, \cdots a_{2010}$ 중에는 -1이 홀수 개가 있다.

(i) -1이 $4k+1$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ )$개일 때

$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+1} = i$

(ii) -1이 $4k+3$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ )$개일 때

$x = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2010}} = i^{4k+3} = -i$

따라서 만족하는 x 의 값은 $i,\ -i$ 이다.

4. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{50}-\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{100}$ 을 간단히 하시오.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -3

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i\ ,$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{준식})&=(-i)^{50}+i^{50}-(-i)^{100}\\&=\{(-i)^2\}^{25}+(i^2)^{25}-\{(-i)^2\}^{50}\\&=-1-1-1=-3\end{aligned}$$

5. $x = \dfrac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + ... + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$　　② -1　　③ $-i$

④ 1　　⑤ i

해설

$x = \dfrac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2006} + x^{2007}$

$= 0 + 0 + \cdots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$

$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$

$= -i - 1 + i$

$= -1$

6. n 이 자연수일 때, $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{4n+2}+\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ 의 값은?

① -2　② $-2i$　③ 0　④ 2　⑤ $2i$

해설

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$ 이므로

(주어진 식) $=(-i)^{4n+2}+i^{4n}$

$=\left\{(-i)^4\right\}^n\cdot(-i)^2+(i^4)^n$

$1\cdot(-1)+1=0$

7. 복소수 z 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

보기

ㄱ $z \cdot \bar{z}$는 실수이다.

ㄴ $z + \bar{z}$는 실수이다.

ㄷ $z - \bar{z}$는 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1)$은 실수이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄴ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

$z = a + bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$ 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로

ㄱ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (실수)

ㄴ $z + \bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$ (실수)

ㄷ $z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

$b = 0$ 이면 실수, $b \neq 0$ 이면 허수이다.

ㄹ $(z+1)(\bar{z}+1) = (a+bi+1)(a-bi+1)$

$= (a+1+bi)(a+1-bi)$

$= (a+1)^2 + b^2$ (실수)

8. 복소수 z 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 할 때, 다음 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $z \neq 0$)

보기

㉠ $z + \bar{z}$ 는 실수이다.
㉡ $z\bar{z} > 0$
㉢ $z - \bar{z}$ 는 허수이다.
㉣ $z^2 + \bar{z}^2 \geq 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣
④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

$z = a + bi,\ \bar{z} = a - bi,\ (a,\ b$ 는 실수$)$
㉠ $z + \bar{z} = 2a$(실수)
㉡ $z\bar{z} = a^2 + b^2 > 0$
㉢ $z - \bar{z} = 2bi$, $b = 0$ 일 경우에는 0 이다.
즉, z 가 실수부로만 이루어져 있는 경우에는
실수이다.
$ex)\ z = 3,\ \bar{z} = 3,\ z - \bar{z} = 3 - 3 = 0$
㉣ $z^2 + \bar{z}^2 = 2(a^2 - b^2) \rightarrow$ 우변이 0 보다 크거나 같다고 할 수는 없다.

9. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\overline{\alpha - \beta i} = \overline{\alpha} - \overline{\beta} i$

ㄴ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + 1$

ㄷ $\alpha\overline{\alpha}^2 + \alpha^2\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

ㄹ $\alpha\overline{\beta} = 1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}} + \dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ

④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

해설

$\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$, $\overline{\alpha} = a - bi$, $\overline{\beta} = c - di$ 라 하면

ㄱ $\overline{\alpha - \beta i} = \overline{a + bi - (c + di)i}$

$= \overline{a + bi - ci - di^2}$

$= a + d - (b - c)i$

$\overline{\alpha} - \overline{\beta} i = (a - bi) - (c - di)i$

$= a - bi - ci + di^2$

$= a - d - (b + c)i$이므로 ㄱ은 거짓

ㄴ $\overline{\alpha + \beta - 1} = \overline{a + bi + c + di - 1}$

$= \overline{(a + c - 1) + (b + d)i}$

$= (a + c - 1) - (b + d)i$

$\overline{\alpha} + \overline{\beta} + 1 = a - bi + c - di + 1$

$= (a + c + 1) - (b + d)i$이므로

ㄴ은 거짓

10. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$

$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$

$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는 실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.

㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$

㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$

$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$

$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

11. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ　⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$

$$= a + 1 - (2 - a)$$

$$= 2a - 1 \neq 3$$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0,\ a \geq 0$ 이다.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$$

$$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$$

$\therefore\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

12. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i=\sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha=\overline{\beta}$ 이면, $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다. ㉡ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다. ㉢ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다. ㉣ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉡,㉣

④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi\ (a,\ b$ 는 실수$)$

㉠ $\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=a^2+b^2$

㉡ $\alpha\beta=0$, $a^2+b^2=0$, $a=0,\ b=0$

㉢ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

㉣ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$

13. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5 ② -2 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,

양변에 x 를 곱하면

$x^2+1=tx$

$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로

$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

14. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k<1$ ② $k\le 1$ ③ $k<3$

④ $k\le 3$ ⑤ $1<k<3$

해설

$3x^2+6x+k=0,$

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-3\cdot k\ge 0$

$3k\le 9 \quad \therefore\ k\le 3$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a-1)x+\frac{1}{4}a^2+a-2=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 조건을 구하면?

① $a>1$ ② $a<\frac{3}{2}$ ③ $a<\frac{3}{4}$ ④ $a>\frac{3}{4}$ ⑤ $a<2$

해설

판별식을 D라고 하면,

$D=(a-1)^2-4\left(\frac{1}{4}a^2+a-2\right)=-6\text{a}+9$

서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$-6a+9>0$에서 $a<\frac{3}{2}$

16. 방정식 $\{1+(a+b)^2\}x^2-2(1-a-b)x+2=0$의 근이 실수일 때 a^3+b^3-3ab의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 0

해설

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-\{1+(a+b)^2\}\cdot 2\ge 0$$

$$-(a+b)^2-2(a+b)-1\ge 0$$

양변에 -1을 곱하면

$$(a+b)^2+2(a+b)+1\le 0$$

$$\{(a+b)+1\}^2\le 0$$

그런데 a, b가 실수이므로 $a+b+1=0$

$$\therefore\ a+b=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^3+b^3-3ab&=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab\\&=(-1)^3-3ab(-1)-3ab\\&=-1\end{aligned}$$

17. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\{1+(a+b)^2\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\{1+(a+b)^2\}$$
$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\geq 0$$
$$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\leq 0$$

즉, $(a+b+1)^2\leq 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$$a+b+1=0$$
$$\therefore\ a+b=-1$$
$$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$$
$$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$$
$$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$$
$$=3$$

18. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $x + y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = (x-2)^2 + (y-4)^2 = 0$

$\therefore\ x = 2,\ y = 4$

$\therefore\ x + y = 6$

해설

$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$이 실근을 가지므로

$D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) \geq 0$

$y^2 - 8y + 16 \leq 0$

$(y-4)^2 \leq 0,\ y = 4$

준식에 대입하면 $x = 2$

따라서 $x + y = 6$