1. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

2. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \quad (\text{분배})\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \quad (\text{분배})\\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합})\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

3. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$ 라 하면
$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$
$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$
$\therefore\ A=x^2+2x-1$ 이므로
$\square$ 안에 알맞은 수는 차례대로 $1,\ 2,\ -1$ 이다.

4. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$　② x^2-a^2

③ $2x^2+3ax+a^2$　④ $2x^2-3ax-a^2$

⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로

$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$

따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로

$P(x)=2x-a$

$\therefore\ (x+a)P(x)=(x+a)(2x-a)$

$=2x^2+ax-a^2$

5. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a^2+1)^2-a^2$
$= a^4+a^2+1$

6. $(10^5+2)^3$의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

7. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$을 곱하면,

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x^3 + 1 = 0$, $x^3 = -1$에서 $x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$

$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdots\cdots ①$

$x^2 - x + 1 = 0$를 x로 나누어 정리한다.

$x + \frac{1}{x} = 1$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$

① 에 대입하면, $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$

8. 상수 a, b에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a+b$의 값은?

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}=\frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$이어야 한다.
양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$을 곱하면,
$a(x+3)+b(x-1)=6(x+1)$
$(a+b)x+(3a-b)=6x+6$
$\therefore\ a+b=6,\ 3a-b=6$
두 식을 연립하여 풀면,
$a=3,\ b=6-a=3$
$\therefore\ 2a+b=2\times 3+3=9$

9. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

x에 대한 항등식이므로
$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$㉠
$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$㉡
$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=7$, $c=2$
$\therefore\ a+b+c=15$

10. $\dfrac{2x+3a}{4x+1}$가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $12a=2$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$)라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\dfrac{1}{2}$이므로 $3a=k$에서 $a=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

11. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1\neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

12. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

13. 다항식 $f(x)$를 x^2-x로 나누면 3이 남고 x^2+x-6로 나누면 $x-1$이 남을 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ −2 ⑤ −3

해설

$f(x)=x(x-1)Q_1(x)+3$

$f(x)=(x-2)(x+3)Q_2(x)+x-1$

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

$f(1)=3,\ f(2)=1$ 이므로

$a+b=3,\ 2a+b=1$

연립하여 풀면, $a=-2,\ b=5$

∴(구하는 나머지)$R(x)=-2x+5$

∴ $R(1)=3$

14. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누면 나머지는 -4 이고, 그 몫을 $x+2$ 로 나누면 나머지는 2 이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$ 라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

15. x에 대한 다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a+b+c+d+k$의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

해설

다항식 x^3+ax^2-x+b를 $x-3$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a+9$	$9a+24$
	1	$a+3$	$3a+8$	$9a+b+24$

이때 $k=3$, $c=3$, $a+3=4$, $3a+9=d$, $9a+b+24=37$ 이므로

$k=3$, $c=3$, $a=1$, $d=12$, $b=4$

따라서 $a+b+c+d+k=1+4+3+12+3=23$

16. $2x^3+9x^2+11x+7=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 x에 대한 항등식일 때, $a,\ b,\ c, d$를 차례로 구하면?

① 3, −1, 3, 2　　② 2, 3, −1, 3

③ −3, 1, −3, −2　　④ −2, −3, 1, −3

⑤ 1, −3, 4, −2

해설

조립제법을 이용하면

−1	2	9	11	7	
		−2	−7	−4	
−1	2	7	4	3	← d
		−2	−5		
−1	2	5	−1	← c	
		−2			
	2	3	← b		
	↑				
	a				

$a=2,\ b=3,\ c=-1,\ d=3$

17. 다음 중 $x^2+y^2+2xy-2x-2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x+y$ ② $-x-y$ ③ $x+y-2$

④ $x-y$ ⑤ $2x+2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2+2xy+y^2)-2(x+y)\\ &= (x+y)^2-2(x+y)\\ &= (x+y)(x+y-2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y-2) &= -(-x-y)(x+y-2)\\ &= \frac{1}{2}(2x+2y)(x+y-2)\end{aligned}$$

18. 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립할 때, x^2-y^2의 값은?

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2=4\times 3^n$$

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 7 ⑤ 9

해설

$$[(x+y)^n+(x-y)^n]^2-[(x+y)^n-(x-y)^n]^2$$
$$=4\times 3^n$$
$$4\{(x+y)(x-y)\}^n=4\times 3^n$$
$$4(x^2-y^2)^n=4\times 3^n$$
$$\therefore\ x^2-y^2=3$$

19. $x^2+xy-2y^2-2x-y+1$을 인수분해하면?

① $(x+y-1)(x+2y-1)$　② $(x-y-1)(x+2y-1)$

③ $(x-y+1)(x+2y-1)$　④ $(x-y-1)(x+2y+1)$

⑤ $(x+y+1)(x+2y-1)$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$x^2+(y-2)x-2y^2-y+1$

$=\{x-(y+1)\}\{x+(2y-1)\}$

$=(x-y-1)(x+2y-1)$

20. $\dfrac{100^3-1}{101\times100+1}$ 의 값을 구하면?

① 99 ② 100 ③ 101 ④ 102 ⑤ 103

해설

$a=100$ 이라 하면

$$\frac{a^3-1}{(a+1)a+1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a^2+a+1)}$$
$$=a-1=99$$

21. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

22. 다음 식을 인수분해하면 $x^4-3x^2y^2+4y^4=(x^2+axy+by^2)(x^2+cxy+dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a,b,c,d는 정수)

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4+4x^2y^2+4y^4-7x^2y^2\\ &= (x^2+2y^2)^2-7x^2y^2\\ &= (x^2+\sqrt{7}xy+2y^2)(x^2-\sqrt{7}xy+2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c+d=4$

23. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)(3x^2+ax+2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2+ax+2a$ 는
$x+2$ 또는 $x+1$ 을 인수로 가져야 한다.
$f(x)=3x^2+ax+2a$ 로 놓을 때
$x+2$ 가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$ 가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$ 를 인수로 갖는다.
$x+1$ 이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$
$\therefore a=-3$

24. 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 최대공약수가 $x-1$이고, 최소공배수가 x^3+x^2-2x일 때, 두 다항식의 합은?

① $2x^2-2$ ② $2x^2+x+1$ ③ $2x^2+x-1$
④ $2x^2+x+2$ ⑤ $2x^2+x-2$

해설

최소공배수 : $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$
최대공약수 : $(x-1)$
따라서 두 다항식은 x^2-x, x^2+x-2
$\therefore\ 2x^2-2$

25. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식의 최대공약수가 $x+3$이고 최소공배수가 x^3+x^2-6x일 때, 두 이차식의 합은?

① $(x+1)(x-2)$ ② $(x+2)(x+4)$

③ $2(x-1)(x+3)$ ④ $2(x-2)(x-4)$

⑤ $2(x+1)(x-4)$

해설

최대공약수가 $x+3$ 이므로 두 이차식을
$a(x+3)$, $b(x+3)$ (a, b 는 서로소)라 하고
최소공배수를 $f(x)=x^3+x^2-6x$ 라 하면
$f(x)=x(x^2+x-6)=x(x+3)(x-2)$
따라서 두 다항식은
$x(x+3)$, $(x-2)(x+3)$ 이므로
구하는 두 다항식의 합은
$x(x+3)+(x-2)(x+3)=(x+3)(2x-2)$
$=2(x-1)(x+3)$

26. 다음은 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때, 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 A와 B의 최대공약수는 B와 R의 최대공약수와 같음을 보인 것이다.

> A와 B의 최대공약수를 G라 하고,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (a, b는 서로소)를
> $A = BQ + R$에 대입하면
> $Ga = GbQ + R$ $\quad \therefore\ R = G(a - bQ)$
> 그러므로 (가)는 B와 R의 공약수이다.
> 그런데, a, b는 서로소이므로 b와 $a - bQ$ 사이에는 상수이외의 (나)가 없다.
> 따라서 G는 B와 R의 최대공약수이다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

① $a - bQ$, 공약수 ② G , 공약수

③ G , 공배수 ④ $a - bQ$, 공배수

⑤ G , 서로소

해설

$A = Ga$, $B = Gb$ 를 $A = BQ + R$ 에 대입하면 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = G(a - bQ)$ 그러므로 (G)는 B와 R의 공약수이다.
그런데 a, b는 서로소이므로 b와 $a - bQ$ 사이에는 상수 이외의 (공약수)가 없다.

27. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여 다음 식이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{10}}{x-10}$$

① 0 ② -1 ③ 1 ④ -10 ⑤ 10

해설

우변을 통분하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면,

$$(\text{우변}) = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{10})x^9 + \cdots}{(x-1)(x-2)\cdots(x-10)}$$

양변의 계수를 비교하면

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0$

28. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26 ② 48 ③ 84 ④ 96 ⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times7)$

$=84$

29. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$ 이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2^{24} ④ 2^{25} ⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x = 1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①

$x = -1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50} = 0$

30. x에 관한 3차 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 2, $x+1$로 나눈 나머지가 4라고 한다. $f(x)$에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라 하면 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x)=px^3+ax^2+qx+b$라 하면
$f(1)=2,\ f(-1)=4$에서
$p+a+q+b=2\cdots$㉠
$-p+a-q+b=4\cdots$㉡
㉠$+$㉡를 하면
$2(a+b)=6,\ a+b=3$

31. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2　② $a = 1$ 또는 2　③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1　⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.
(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$
(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

32. 1999개의 다항식 x^2-2x-1, x^2-2x-2, $\cdots$, $x^2-2x-1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2-2x-n=(x+a)(x-b)$ (a, b는 자연수)라 하면 ($1 \le n \le 1999$인 자연수)

$ab=n$, $a=b-2$

$\therefore n=1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5,\ \cdots,\ 43\cdot 45(=1935)$의 43개

33. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2, B = x^3 - x^2 - ax + 4$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2, \quad \alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A식에 대입하면
$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$